CALCUL PRATIQUE DU BÉTON ARMÉ

RÈGLES B.A.E.L. 83

GEORGES DREUX

EYROLLES

CALCUL PRATIQUE DU BÉTON ARMÉ

RÈGLES BAEL 83

O9b

CHEZ LE MEME EDITEUR

Du même auteur :	NOUVEAU GUIDE DU BETON
G. Dreux, J. Mazars, M. Rimboeuf	COURS PRATIQUE DE BETON PRECONTRAINT Règles B.P.E.L.
Autres ouvrages :	
J.M. Bouchart, G. Cibois, G. de Haro	INITIATION AU BETON ARMÉ Règles BAEL 83
J.C. Doubrère	COURS PRATIQUE DE BETON ARMÉ Règles CCBA 68 - Règles BAEL 83
J.P. Mougin	COURS DE BETON ARMÉ AUX ETATS LIMITES SUIVANT LES REGLES BAEL 83 Calcul des éléments simples. Calcul des structures de bâtiment
W.A. Jalil, Ph. Ader	CALCUL PRATIQUE DES STRUCTURES Exercices de résistance des matériaux avec leurs solutions
A.F. Decelle, D. Legendre	MECANIQUE APPLIQUEE AU GENIE CIVIL Résistance des matériaux. Initiation à l'élasticité. Calcul des structures
R. Montagner	COURS DE RESISTANCE DES MATERIAUX
A. Haddadi	CALCULS DE BETON ARMÉ EN **BASIC**
B. Asancheyev	CALCUL DES STRUCTURES EN **BASIC**
E. Rosenthal	CALCULS DE CONSTRUCTION METALLIQUE EN **BASIC**

CALCUL PRATIQUE DU BÉTON ARMÉ

RÈGLES BAEL 83

par

Georges DREUX

PRÉFACE DE

R. KASTLER

Vice-Président de la Commission Pédagogique Nationale des I.U.T. de Génie Civil

QUATRIEME EDITION
revue et corrigée

EYROLLES

61, boulevard Saint-Germain, 75005 Paris
1988

Si vous désirez être tenu au courant de nos publications, il vous suffit d'adresser votre carte de visite au :

Service «Presse», Editions EYROLLES
61, Boulevard Saint-Germain
75240 PARIS CEDEX 05

en précisant les domaines qui vous intéressent. Vous recevrez régulièrement un avis de parution des nouveautés en vente chez votre libraire habituel.

« La loi du 11 mars 1957 n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, d'une part, que les «copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective» et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, «toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite» (alinéa 1er de l'article 40).».

«Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal.».

© Editions EYROLLES, 1988

PRÉFACE

M. DREUX est bien connu dans la profession du Bâtiment et des Travaux Publics où il a accompli toute sa carrière depuis la construction du Pont de Tancarville jusqu'aux études menées au Centre d'Essai des Structures de Saint Rémy les Chevreuse.

A ses talents d'ingénieur, M. DREUX joint ceux d'un excellent cinéaste et d'un conférencier d'une clarté exceptionnelle.

Après la réussite de sa «Pratique du béton précontraint», *il a voulu ajouter un fleuron de plus à sa carrière en réalisant cet ouvrage* «Calcul pratique du béton armé».

Il a relevé ce défi d'exposer simplement les méthodes de calcul du B.A.E.L. (Béton Armé aux Etats Limites), pour le rendre accessible aux élèves techniciens des I.U.T. (Instituts Universitaires de Technologie) de Génie Civil, dont il est le professeur.

Si cet ouvrage ne fait appel à aucune connaissance de mathématiques supérieures, il n'est pas du tout un ouvrage de vulgarisation.

C'est un ouvrage technique ; M. DREUX ne se permet aucune impasse scientifique, il a seulement l'art de présenter les théories et les calculs pour les rendre aisément abordables.

Les ingénieurs qui n'ont pas eu l'occasion de suivre l'éclosion du B.A.E.L. et qui voudraient se recycler rapidement dans cette discipline, trouveront également dans ce livre l'essentiel de ce qu'il convient de connaître pour assimiler ces nouvelles méthodes de calcul et pouvoir les utiliser.

A la lecture de cet ouvrage, on reconnaît le pédagogue avisé qu'est M. DREUX :
dès le début du livre, il a le souci de donner à l'élève l'habitude d'utiliser les unités internationales, tout en lui permettant de relier les vieilles unités du kilogramme ou du bar au kilonewton et au mégapascal.

Il rappelle aussi quelques définitions de base parfois mal assimilées : l'effort tranchant, le module d'élasticité, le coefficient de Poisson...

Il donne la nomenclature de toutes les notations utilisées, qui sont trop souvent le casse-tête d'ingénieurs confirmés, mais habitués à leurs propres anciennes notations.

Il peut alors définir ce qu'est l'Etat-Limite Ultime et l'Etat-Limite de Service.

A partir de ces bases se déroule toute la théorie du calcul d'une poutre en flexion simple, l'étude de l'effort tranchant, de la compression simple, de la flexion composée, des poutres hyperstatiques, des dalles et enfin un dernier chapître aborde les difficiles problèmes de torsion.

Chacune de ces théories est immédiatement illustrée par un ou plusieurs exemples concrets.

Ceci permet de vérifier la compréhension de la théorie, et constitue un fil conducteur pour le calculateur confronté à un problème courant.

Dans un esprit très réaliste, le calcul conduit parfois, comme souvent dans la pratique, à un résultat non conforme aux règles imposées, et oblige à modifier les hypothèses de départ.

Dans certains cas, M. DREUX expose une méthode d'optimisation, c'est-à-dire qu'il prépare très directement les futurs projeteurs à leur métier.

Elèves des I.U.T., vous avez de la chance d'avoir en mains un outil de travail qui vous permettra d'aborder sans trop de peine cette discipline, qui peut a priori paraître ardue ; ceux d'entre vous qui auront la chance d'avoir M. DREUX comme professeur, seront encore plus gâtés, car oralement, il saura faire passer avec aisance les points les plus délicats de toute cette théorie.

R. KASTLER

Vice-Président de la Commission Pédagogique
Nationale des I.U.T. de Génie Civil.

TABLE DES MATIERES

Préface V

Préambule 1

1. Construire en béton : une science expérimentale 1

2. Le calcul aux états limites. Pourquoi ? 3

3. Généralités 4

1. Un peu d'histoire - 2. Principe du béton armé - 3. Fonctionnement du béton armé - 4. Notations - 5. Unités et orientations.

MODULE A : **Prescriptions générales et réglementaires** 17

CHAPITRE A.1. *Réglementation en vigueur* 17

CHAPITRE A.2. *Domaine d'application* 18

CHAPITRE A.3. *Les matériaux* 19

A.3.1. Le béton 19

A.3.2. Les aciers 22

CHAPITRE A.4. *Les actions* 28

CHAPITRE A.5. *Les sollicitations* 32

CHAPITRE A.6. *Dispositions concernant les armatures* 41

CHAPITRE A.7. *Section en Té* 44

CHAPITRE A.8. *Condition de non fragilité* 45

MODULE B : **États limites en flexion simple** 47

CHAPITRE B.1. *Définitions et principes* 47

CHAPITRE B.2. *État limite ultime* 49

B.2.1. Hypothèses fondamentales 49

B.2.2. Règle des trois pivots 49

B.2.3. Diagramme contraintes-déformation 50

B.2.4. Principes de calcul 51

CHAPITRE B.3. *État limite de service* 54

B.3.1. Hypothèses fondamentales 54

B.3.2. Calculs de vérification 54

B.3.3. Diagrammes des contraintes 55

B.3.4. Principes des calculs 55

CHAPITRE B.4. *Prédimensionnement* 58
B.4.1. Section de béton 58
B.4.2. Section d'armatures tendues 59
B.4.3. Contrainte du béton 59
B.4.4. Armatures comprimées 59
B.4.5. Tableaux et abaques 60

CHAPITRE B.5. *Calcul pratique à l'état limite ultime - Section rectangulaire* 61
B.5.1. Données du projet 61
B.5.2. Prédimensionnement 62
B.5.3. Calcul à l'état limite ultime 63

CHAPITRE B.6. *Calcul pratique à l'état limite de service Section rectangulaire* 66
B.6.1. Sollicitation de service 66
B.6.2. Calcul de y et I 66
B.6.3. Contraintes de service 67

CHAPITRE B.7. *Calcul pratique à l'état limite ultime Section en Té* 68
B.7.1. Données du projet 68
B.7.2. Prédimensionnement 69
B.7.3. Calcul à l'état limite ultime 71

CHAPITRE B.8. *Calcul pratique à l'état limite de service Section en Té* 73
B.8.1. Sollicitations de service 73
B.8.2. Calcul de y et I 73
B.8.3. Contraintes de service. 73
B.8.4. Armatures transversales de la dalle supérieure 74
B.8.5. Armatures transversales de la poutre 74

CHAPITRE B.9. *Poutres expérimentales - Sécurité* 75
B.9.1. Poutre n° 1 (sous-armée) 75
B.9.2. Poutre n° 2 (poutre normalement armée) - Optimisation . . 80

CHAPITRE B.10. *Schéma de calcul à l'état limite ultime en flexion simple* 84

CHAPITRE B.11. *Méthode du moment réduit μ* 85

CHAPITRE B.12. *Schéma de calcul à l'état limite de service en flexion simple* 86

MODULE C : **États limites à l'effort tranchant** 87

CHAPITRE C.1. *Calcul de l'effort tranchant limite* 88

CHAPITRE C.2. *Contraintes tangentes* 89

CHAPITRE C.3. *Armatures d'âme* 91
C.3.1. Section résistante 91
C.3.2. Section minimale 93

CHAPITRE C.4. *Conditions d'appui* 94

CHAPITRE C.5. *Adhérence* 95
C.5.1. Définition 95
C.5.2. Calcul de la contrainte d'adhérence 95
C.5.3. Ancrages rectilignes 96
C.5.4. Ancrages courbes 96
C.5.5. Recouvrement 97

CHAPITRE C.6. *Calculs pratiques à l'effort tranchant* 99
C.6.1. Calcul de l'effort tranchant ultime 99
C.6.2. Contrainte de cisaillement du béton 100
C.6.3. Armatures d'âme 100
C.6.4. Armatures longitudinales à l'appui 102

CHAPITRE C.7. *Arrêts de barres* 104
C.7.1. Courbe-enveloppe des moments fléchissants 104
C.7.2. Moments résistants ultimes 105
C.7.3. Exemple de calcul pratique 105

MODULE D : **Dessins d'exécution** 109

MODULE E : **Traction simple** 111

CHAPITRE E.1. *Définition* 111

CHAPITRE E.2. *Dispositions particulières et principe de calculs* 112

CHAPITRE E.3. *Calcul pratique entre traction simple* 113

MODULE F : **Compression simple - cas des poteaux en compression centrée** 117

CHAPITRE F.1. *Définition* 117

CHAPITRE F.2. *Disposition des armatures* 118
F.2.1. Armatures longitudinales 118
F.2.2. Armatures transversales 118

CHAPITRE F.3. *Actions et combinaisons* 119

CHAPITRE F.4. *Flambement* 120
F.4.1. Définition et sollicitations 120
F.4.2. Longueur de flambement 120
F.4.3. Elancement 122

CHAPITRE F.5. *Principe de calcul* 123

CHAPITRE F.6. *Frettage* 125

CHAPITRE F.7. *Cas des poteaux en compression centrée* 127
F.7.1. Exemples de poteaux encastrés ou articulés 127
F.7.2. Prédimensionnement de la section 128
F.7.3. Armatures longitudinales 129
F.7.4. Optimisation 130
F.7.5. Armatures transversales 131
F.7.6. Dessins d'exécution 131

CHAPITRE F.8. *Poteau expérimental en compression simple* 133

MODULE **G : Flexion composée** 137
Cas des poteaux en compression excentrée

CHAPITRE G.1. *Définition* 137

CHAPITRE G.2. *Etude des sollicitations* 138

CHAPITRE G.3. *Règle des trois pivots - Compléments* 140
G.3.1. Rappel 140
G.3.2. Equations de base 141
G.3.3. Moments de référence 142
G.3.4. Détermination du pivot 142
G.3.5. Calcul en pivot A 143

CHAPITRE G.4. *Principe de calcul* 145

CHAPITRE G.5. *Exemples de calcul* 147
G.5.1. Section rectangulaire sans armatures comprimées 147
G.5.2. Section rectangulaire avec armatures comprimées 148
G.5.3. Méthode du moment réduit μ appliquée à la flexion simple 149

CHAPITRE G.6. *Diagramme d'interaction* 152
G.6.1. Objet 152
G.6.2. Equations d'équilibre (calcul de μ_0 et ν_0) 152
G.6.3. Abaques : Pratique d'utilisation 155
G.6.4. Exemple de calcul par abaques 165
G.6.5. Remarque importante 166
G.6.6. Section entièrement tendue - Cas d'un tirant fléchi 166

CHAPITRE G.7. *Cas des poteaux en compression excentrée - Stabilité de forme* 168

CHAPITRE G.8. *Poteau expérimental en compression excentrée* 169

CHAPITRE G.9. *Flexion composée - Etat limite de service* 173

MODULE **H : Poutres hyperstatiques** 179

CHAPITRE H.1. *Définition* 179

CHAPITRE H.2. *Cas particuliers des poutres encastrées à une ou deux extrémités* 186

CHAPITRE H.3. *Adaptation* 189

CHAPITRE H.4. *Poutres continues - Méthode forfaitaire* 189
H.4.1. Domaine et conditions d'application 191
H.4.2. Exemple de calcul d'une poutre continue 191

CHAPITRE H.5. *Poutres continues - Méthode de Caquot* 197
H.5.1. Domaine d'application 197
H.5.2. Principe de la méthode 197

CHAPITRE H.6. *Poutres continues - méthode des trois moments* 198
H.6.1. Equation des trois moments 198
H.6.2. Application 199
H.6.3. Efforts tranchants, méthode classique 202
H.6.4. Efforts tranchants, méthode simplifiée 202

MODULE I : **Dalles** 203

CHAPITRE I.1. *Cas des dalles portant sur deux côtés parallèles* 203

CHAPITRE I.2. *Cas des dalles rectangulaires appuyées sur quatre côtés* . . 204
- I.2.1. Répartition des moments 204
- I.2.2. Abaques de Pigeaud 205
- I.2.3. Cas des structures courantes 219

CHAPITRE I.3. *Calcul en flexion ; disposition des armatures* 220

CHAPITRE I.4. *Calcul à l'effort tranchant* 222
- I.4.1. Evaluation des efforts tranchants 222
- I.4.2. Justification des armatures 222

CHAPITRE I.5. *Condition de non fragilité* 224

CHAPITRE I.6. *Poinçonnement* 225

CHAPITRE I.7. *Exemple de calcul d'une dalle* 227
- I.7.1. Evaluation des moments ultimes 227
- I.7.2. Evaluation des moments résistants (armatures longitudinales) 228
- I.7.3. Efforts tranchants 230
- I.7.4. Condition de non fragilité 230
- I.7.5. Poinçonnement 231
- I.7.6. Dispositions des armatures 231

MODULE J : **Torsion** 233

CHAPITRE J.1. *Le phénomène de torsion* 233

CHAPITRE J.2. *Calcul des contraintes* 236
- J.2.1. Sections creuses 236
- J.2.2. Sections pleines 236

CHAPITRE J.3. *Justification du béton* 237

CHAPITRE J.4. *Justification des armatures* 238

MODULE K : **Fondations** 239

CHAPITRE K.1. *Résistance du sol* 240

CHAPITRE K.2. *Fondations superficielles* 241
- K.2.1. Semelles continues 241
- K.2.2. Semelles sous poteaux 243
- K.2.3. Poteaux soumis à un moment 244

CHAPITRE K.3. *Fondations profondes* 246
- K.3.1. Semelles sur deux pieux 246
- K.3.2. Semelles sur plus de deux pieux 247
- K.3.3. Pieux en béton armé 247

CHAPITRE K.4. *Méthode du C.E.B.* 249

BIBLIOGRAPHIE 250

PRÉAMBULE

1. Construire en BÉTON : une science expérimentale

Avant d'aborder la technique du Béton Armé et les calculs nécessaires pour le dimensionnement et la sécurité des ouvrages, il convient d'appeler l'attention des futurs projeteurs sur le côté essentiellement «EXPÉRIMENTAL» de cette technique.

En effet, les calculs font un large appel aux lois fondamentales de comportement de la matière, ce qui leur donne un aspect scientifique et mathématique. De là découle souvent, pour certains, une croyance aveugle dans la rigueur des calculs et qui entrainerait, ipso facto, un comportement de l'ouvrage calculé, fidèlement conforme aux résultats de ces calculs.

Prenons tout d'abord conscience du problème tel qu'il se pose au constructeur pour établir un projet ; on peut ainsi le résumer :

1) Prendre connaissance du programme des «Actions» à prendre en compte (charges diverses à supporter).

2) Prendre connaissance de la nature et de la résistance du sol sur lequel doit être édifiée la construction.

3) Imaginer une «structure» qui pourra conduire les «Actions» prévues jusqu'au sol où elles devront trouver leurs réactions d'équilibre.

Tout constructeur, digne de ce nom, doit être capable d'imaginer les dispositions générales de cette structure, presque sans calculs, mais en faisant surtout appel à ses qualités de constructeur :

- connaissance des différentes formes de structures possibles
- notions quasi-instinctives des compositions et décompositions des forces, de leur cheminement et des «sollicitations» ainsi créées.
- connaissance du comportement et des possibilités de résistance des matériaux utilisés.
- sens de la simplification des formes et de l'économie des moyens
- sens de l'esthétique de la construction (dans la plupart des cas).
- imagination, réflexion, persévérance
- et enfin, un solide bon sens et beaucoup de travail.

La structure ayant ainsi pu être conçue dans ses grandes lignes et prédimensionnée par quelques évaluations simplifiées et approximatives, le constructeur pourra alors aborder les calculs proprement dits qui lui permettront de *dimensionner définitivement* chaque élément en conformité avec la sécurité imposée et les règlements en vigueur.

Mais ces calculs ne permettent qu'une *approche du comportement réel probable* de la structure, l'approximation étant évidemment couverte par les coefficients de sécurité réglementaires pris en compte dans les calculs.

Pour terminer ce préambule, nous allons citer quelques paroles ou écrits de certains, parmi les grands noms de la construction en béton :

Balency-Bearn

«Constructeur par excellence, doué d'une culture étendue et d'un goût artisti-
«que très sûr, Nicolas Esquillan a également apporté à sa tâche un véritable «talent»
«car dans ses œuvres toutes merveilleusement achevées, on sent ce *parfait chemine-*
«*ment des efforts.* »

Rabut

«Qui plus est, dans l'art de construire, les calculs sont loin d'être l'élément
«d'investigation principal. Ce n'est que peu à peu, l'expérience aidant, que l'on
«s'aperçoit que les calculs ne sont qu'un outil permettant de préciser et de mettre
«au point la conception de l'Ingénieur. Cette mise au point est le «seul» rôle du
«calcul et c'est alors seulement qu'il doit intervenir. Il ne doit servir qu'à préciser
«les dimensions, que la documentation, la critique, l'induction et l'expérience ont
«initialement inspirées à l'Ingénieur».

Freyssinet

«Il n'existe pour moi que deux sources d'information : la perception directe
«des faits et l'intuition en laquelle je vois l'expression et le résumé de toutes les
«expériences accumulées par la vie dans le subconscient des êtres, depuis la première
«cellule. Il faut, bien entendu, que l'intuition soit contrôlée par l'expérience. Mais
quand elle se trouve en contradiction avec le résultat d'un calcul, je fais refaire le
«calcul, et mes collaborateurs assurent que, en fin de compte, c'est toujours le
«calcul qui a tort.

«Qu'on me comprenne bien : je ne nie pas la grandeur et la beauté des mathé-
«matiques....

«Mais nous ne devons jamais oublier qu'elles ne nous fournissent que des
«moyens de changer la forme des données que nous possédons déjà et, quels que
«puissent être l'intérêt et l'utilité de telles transformations, nous ne retrouvons jamais
«à la fin d'un calcul que ce que nous y avons mis à l'origine.

«Si j'insiste sur ce point, c'est que de très nombreux ingénieurs agissent comme
«s'ils étaient persuadés du contraire.

«J'ai fini par comprendre que, dans la majorité de ces cas, je n'avais pas affaire
«à de simples idiots, mais plutôt à des pleutres auxquels la responsabilité d'affirmer
«la vérité d'un essai, fait en leur présence, paraissait plus lourde à porter que celle de
«la vérification d'un calcul. Ils s'abritaient derrière leur matelas d'équations qu'ils
«jugeaient d'autant plus efficaces qu'elles étaient plus compliquées.

«Je tiens que, privée de l'appui de l'expérience, la déduction mathématique
«n'est qu'une source d'erreurs, d'autant plus dangereuse qu'elle est pleine d'attraits.

«J'ai par ailleurs assez longuement flirté avec cette séduisante sirène pour savoir «quels prodigieux délices elle peut dispenser à ses adorateurs. Mais qu'ils prennent «garde...»

Que le lecteur ne s'étonne donc pas si le calcul des structures en Béton Armé ne repose pas toujours sur des théories *scientifiques* et si les méthodes de calcul n'en découlent pas toujours par une stricte et rigoureuse déduction mathématique.

Les formules de calcul ainsi que les nombreux coefficients utilisés ont, le plus souvent, un caractère empirique ; ce qui est l'essentiel c'est qu'ils aient été fixés à la suite d'un grand nombre d'essais et que les résultats des calculs soient conformes à l'expérience.

2. Le calcul aux états limites pourquoi ?

Pendant près d'un siècle, le béton armé a été calculé «aux contraintes admissibles». Pour cela, on déterminait pour le béton et l'acier des contraintes dites «admissibles» définies à partir des contraintes de rupture de ces matériaux multipliées par un coefficient de sécurité inférieur à 1, par exemple le coefficient de sécurité sur le béton est resté longtemps égal aux 28/100 de la résistance moyenne de rupture à 90 jours et, sur les aciers, aux 60/100 de la limite élastique. On calculait les contraintes dans ces matériaux sous l'effet le plus défavorable des charges *exactement prévues* et elles ne devaient pas dépasser ces contraintes «admissibles».

La sécurité globale d'une construction n'était donc assurée que par ces coefficients (0,28 ou 0,60) *comme si le seul facteur d'insécurité était la résistance intrinsèque des matériaux utilisés.*

La notion de sécurité a évolué et cherche, aujourd'hui, à prendre en compte tous les facteurs d'insécurité, comme par exemple :

- la résistance intrinsèque des matériaux
- la valeur la plus probable des charges permanentes
- la valeur des actions variables appliquées (avec une probabilité de dépassement)
- l'aspect défavorable ou favorable de ces charges et actions
- l'approximation du calcul des sollicitations (moment fléchissant, effort tranchant...)
- défauts géométriques dans les diverses dimensions de la structure
- fissuration plus ou moins défavorable
- etc...

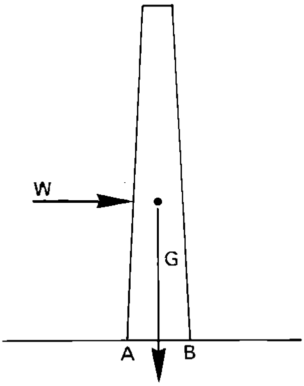
On tient compte de tous ces facteurs d'insécurité en leur appliquant *individuellement* un coefficient de sécurité diviseur γ ($\gamma > 1$) ce coefficient γ étant d'autant plus élevé que le facteur en question présente une moins bonne «fiabilité». On cerne ainsi beaucoup mieux la sécurité *globale* de la structure fonction de ces différents facteurs d'insécurité et de leur plus ou moins grande fiabilité. C'est ce principe, basé sur une théorie «semi-probabiliste» qui est à la base du Calcul *«aux états limites»*.

La définition donnée en est la suivante :

Un «Etat limite» est celui pour lequel une condition requise d'une construction (ou d'un de ses éléments) est strictement satisfaite et cesserait de l'être en cas de modification défavorable d'une action.

Le coefficient 0,28 appliqué sur la résistance du béton dans le calcul aux contraintes admissibles pourrait laisser croire à un coefficient de sécurité très confortable de $\frac{1}{0,28}$ soit 3,5.

Or, il n'en est rien, et dans certains cas, la sécurité peut être compromise par une beaucoup plus faible variation de l'une ou l'autre des actions.



Prenons, par exemple, l'équilibre d'une cheminée en béton soumise à une action favorable : son poids propre G, et une action défavorable : le vent W.

Dans le calcul aux contraintes admissibles on se bornerait à calculer les contraintes en A et B et on vérifierait qu'en A on n'a pas de traction, donc pas besoin d'armatures et qu'en B on ne dépasse pas la contrainte admissible donc que le coefficient de sécurité est $\frac{1}{0,28} \simeq 3,5$.

Or, l'insécurité repose beaucoup plus sur *l'incertitude* concernant la valeur du poids propre G, (densité et section un peu plus faible que prévues) et du vent W ; si G est un peu plus faible (– 10 % par exemple) et W un peu plus fort (+ 10 % par exemple), l'équilibre de la cheminée peut être compromis et, très vite, apparaissent des tractions à la base, donc la nécessité d'y prévoir des armatures, le béton ne résistant pas à la traction.

Dans le calcul aux états limites, on applique des coefficients de sécurité γ aux différentes actions (ici G et W) en fonction de leur fiabilité : le poids G sera pris en valeur minimale et le vent W sera pris en valeur maximale (20 % de majoration sur la valeur du vent exceptionnel).

3. Généralités

1 - Un peu d'histoire

C'est en 1848 que Joseph Louis Lambot imagina d'associer intimement un réseau de barres d'acier et du béton de ciment ; ainsi naissait un nouveau matériau promis à un avenir que son inventeur lui-même n'espérait probablement pas. En guise de première application pratique Lambot se construisit... une barque. Il prit un brevet de cette invention mais il n'y eu pratiquement pas de suite...

Quelques années plus tard, Joseph Monier, un jardinier de Versailles utilisa un procédé analogue pour fabriquer des caisses pour fleurs et arbustes. Il fit breveter son procédé et il eut du succès puisque la rumeur publique lui attribue l'invention du Béton Armé ; d'ailleurs, son brevet fut assez vite exploité en Allemagne par la firme «Monier Béton Bau» entreprise qui existe toujours.

Puis c'est François Hennebique qui mit au point les premières bases de calcul permettant l'utilisation rationnelle de ce matériau.

En 1891, Edmond Coignet fut le premier à utiliser dans la construction d'un immeuble à Biarritz des poutres préfabriquées en béton armé.

Enfin, en 1897, Charles Rabut professait à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées le premier cours concernant ce matériau : le béton armé s'offrait désormais à l'ingéniosité des constructeurs et ils allaient en faire l'usage que l'on sait.

2 - Principe du béton armé

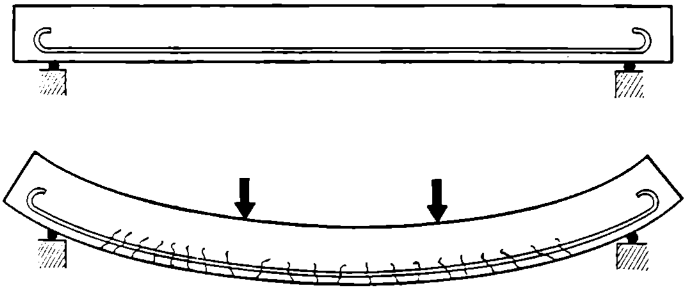
Dans la plupart des structures, certaines parties ou zones sont soumises à des contraintes de compression et d'autres à des contraintes de traction. Or, le béton est un matériau qui résiste fort bien aux contraintes de compression mais très mal aux contraintes de traction, alors que l'acier, par contre, y résiste très bien. D'où l'idée de placer des barres d'acier dans les zones où se produisent des efforts de traction, ces barres étant placées dans le sens de ces efforts ; on pourra donc voir apparaître dans ces zones des microfissures du béton sous l'effet des contraintes de traction mais les aciers empêcheront les fissures de s'ouvrir et prendront seuls à leur compte les efforts de traction.

3 - Fonctionnement du béton armé

a) Fonctionnement en flexion

Pour définir et cerner les principes du béton armé, considérons une poutre constituée d'un matériau élastique. Si nous chargeons cette poutre, elle fléchit et, grâce à la grande élasticité du matériau nous voyons que les fibres supérieures se raccourcissent : elles sont donc comprimées, tandis que les fibres inférieures s'allongent, ce qui correspond à une mise en traction interne.

Si la poutre était en béton non armé, les fibres supérieures résisteraient fort bien à la compression, mais sous l'effort de la traction interne les fibres inférieures se rompraient.

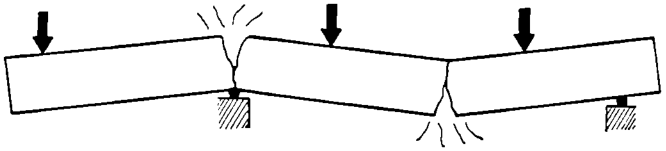


Résistance en flexion d'une poutre en béton armé ; l'armature empêche l'ouverture des fissures et prend à son compte les efforts de traction.

Le principe du béton armé est donc de prévoir des barres d'acier noyées dans le béton, mais plus spécialement dans toutes les zones tendues. Ce sont ces barres d'acier appelées «armatures» qui résistent aux efforts de traction que le béton serait incapable de supporter seul ; c'est pourquoi dans une poutre fléchie entre deux appuis, les armatures longitudinales sont prévues à la partie inférieure tendue ; par contre, à la partie supérieure, le béton soumis à un effort de compression peut y résister seul (en général).

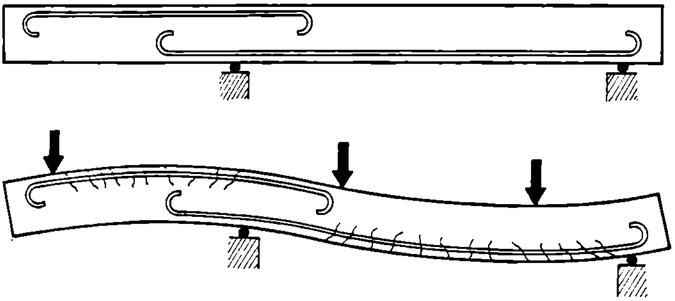
Lorsque les actions de charges deviennent relativement importantes les armatures s'allongent légèrement sous l'effort de traction qu'elles ont alors à supporter et le béton qui les enrobe doit, de ce fait, s'allonger également ; il en résulte en général une légère fissuration répartie tout au long de l'armature mais elle ne peut entraîner la rupture, car l'armature s'oppose à l'ouverture de ces petites fissures. Une pièce en béton armé apparemment fissurée peut donc encore parfaitement résister.

Considérons maintenant une poutre qui serait prolongée par un porte à faux au-delà d'un des appuis. Sur cet appui c'est à la partie supérieure que se manifesteront les efforts de traction dans le béton, c'est donc à la partie supérieure que doivent être



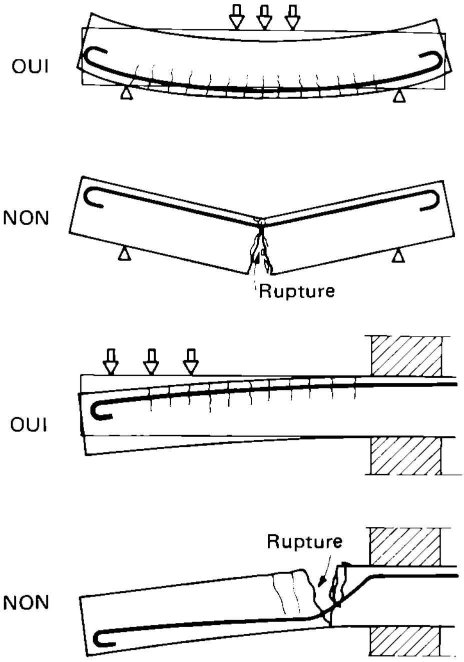
Rupture d'une poutre non armée, (avec console) par traction excessive des fibres tendues.

prévues les armatures. C'est d'après ce principe que dans une dalle de plancher les armatures sont placées en quadrillage à la partie inférieure, tandis que dans une console (ou une dalle de balcon en porte à faux) elles doivent se trouver à la partie



Résistance en flexion de la même poutre mais armée ; les armatures empêchent l'ouverture des fissures.

supérieure. Il arrive parfois, rarement il est vrai, que par inadvertance un ouvrier oubliant ce point essentiel, marche sans précaution sur les armatures ; celles-ci affaissées alors sur le fond du coffrage, ne peuvent plus intervenir efficacement dans la partie supérieure de la dalle où se produisent les efforts de traction et il peut y avoir rupture. Il convient donc que sur le chantier le tracé des armatures soit scrupuleusement établi conformément aux dessins d'exécution.

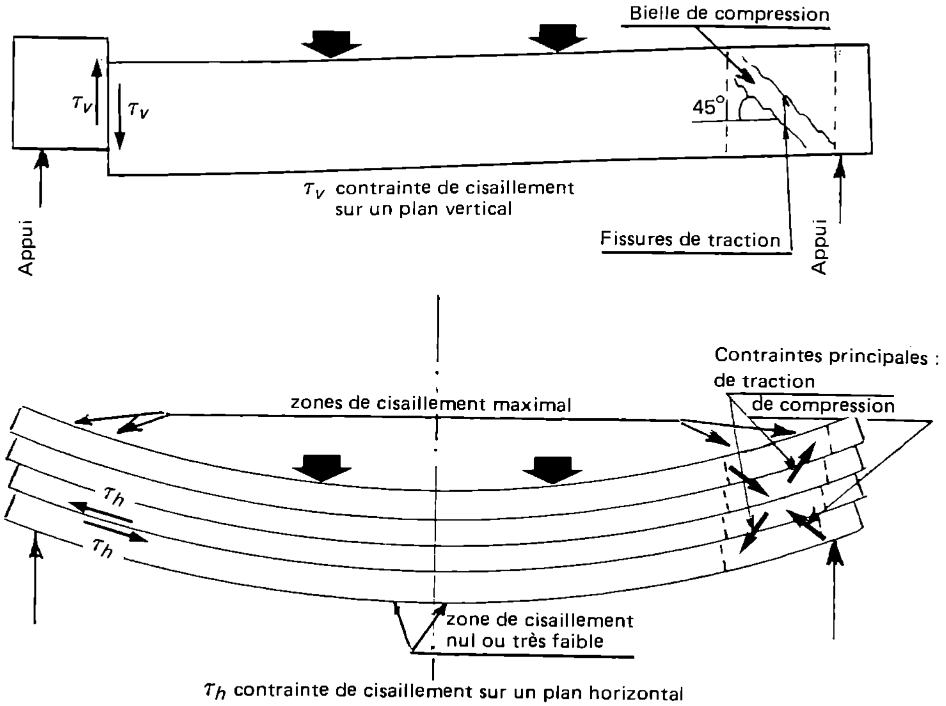


Les armatures longitudinales doivent toujours se trouver près des faces tendues des poutres.

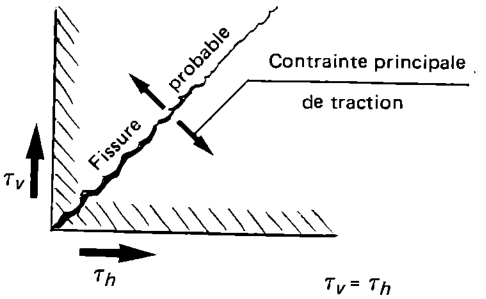
Mais les armatures ne peuvent être parfaitement efficaces que si elles sont adhérentes au béton. Imaginons qu'une armature parfaitement lisse et enduite d'un corps gras par exemple, ne soit pas adhérente, elle peut alors glisser dans sa gaine de béton et ne s'oppose plus ainsi à l'ouverture de larges fissures qui provoquent la rupture. C'est pour renforcer l'adhérence que les armatures sont en général munies de crochets à leurs extrémités ; par ailleurs, depuis un certain nombre d'années on a vu apparaître sur le marché des aciers H.A. dits à «haute adhérence» ; la surface de ces aciers travaillée directement au laminage ou par torsion présente des crantages ou des petites saillies hélicoïdales ou non, ce qui contribue à améliorer l'adhérence.

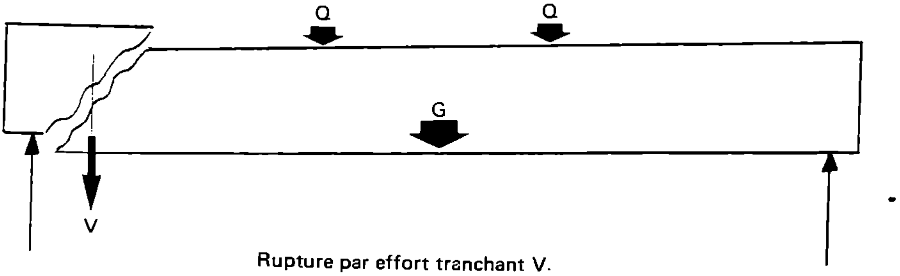
b) Fonctionnement sous effort tranchant

C'est dans les zones au voisinage des appuis que se produisent, en général, les efforts tranchants maximaux ; ces efforts «tranchants» engendrent des contraintes de «cisaillement» τ_v et τ_h et des contraintes de traction dont la valeur maximale correspond à la contrainte «principale» de traction pouvant entraîner une fissuration probable à 45° (on démontre, en effet, sur le cercle de Mohr que $\tau_v = \tau_h$ et que α est incliné à 45°). Selon le principe du béton armé, il faudra donc prévoir des armatures empêchant l'ouverture de ces fissures ; ces armatures dites «de couture» ou «transversales» sont en général placées verticalement et se présentent sous forme de cadres et étriers, en nappes successives dont l'espacement sera d'autant plus faible que l'effort tranchant est plus important.

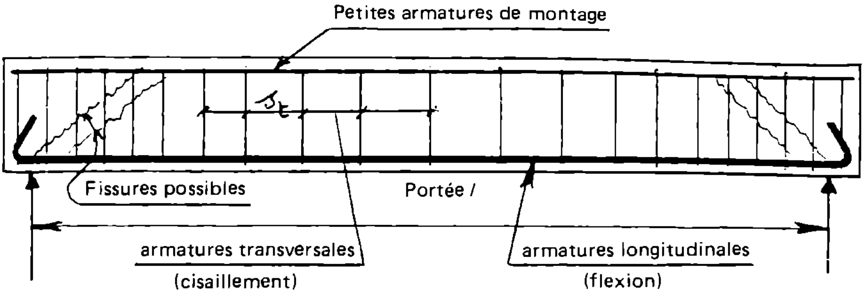


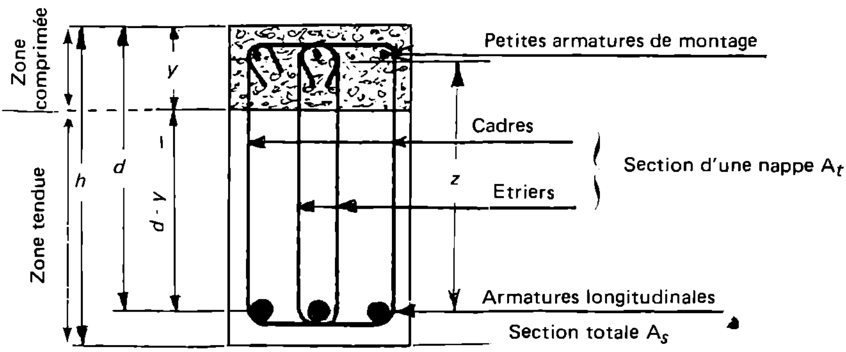
Action de l'effort tranchant.





Rupture par effort tranchant V.



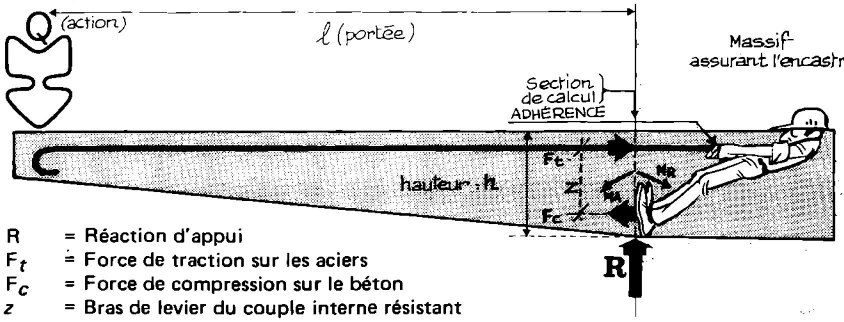


Les armatures transversales dites «de couture» s'opposent à l'ouverture des fissures d'effort tranchant à 45°.

Exemple de calcul volontairement «simpliste»

La figure ci-dessous représente une poutre en console chargée à son extrémité ; la charge Q crée un moment d'action $M_A = Q \times l$.

Dans la section de calcul à l'encastrement (section la plus sollicitée) les armatures, à la partie supérieure, subissent une force de traction F_t tandis que le béton de la zone inférieure subit une compression F_c ; si z est le bras de levier de ce couple interne, le moment «résistant est $F_t \times z$; en première approximation on peut admettre $z \neq 0{,}8$ h.



R = Réaction d'appui
F_t = Force de traction sur les aciers
F_c = Force de compression sur le béton
z = Bras de levier du couple interne résistant
M_A = Moment d'action = Q x l (en négligeant l'action de poids propre de la console)
M_R = Moment du couple interne résistant = F_t (ou F_c) x z ; M_R doit pouvoir équilibrer M_A

Schéma de résistance d'une poutre en console dans sa section de calcul à l'encastrement (voir calcul page suivante).

Pour qu'il y ait équilibre, il faut que :

$M_R + M_A = 0$ soit $M_R = - M_A$

ou $M_R = M_A$ en valeur absolue

$F_t \times 0{,}8\,h = Q \times l$

soit par exemple : $Q = 50\,000$ N ($\sim$ 5 t) = 50 KN = 50.10^{-3} MN

$l = 4$ m $h = 50$ cm $= 50.10^{-2}$ m $= 0{,}5$ m.

on en déduit : $F_t = \dfrac{50\,000 \times 4}{0{,}8 \times 0{,}5} = 500\,000$ N = 500 KN = 0,5 MN

Si on utilise comme armatures un acier pour lequel la contrainte limite de traction (admissible) est, par exemple, de 260 MPa (1).

La section d'acier nécessaire sera d'au moins :

$$A = \frac{500\,000 \text{ N}}{260 \text{N/mm}^2} = 1923 \text{ mm}^2$$

On adoptera, par exemple, 4 ϕ 25 = 1963 mm^2.

Il conviendra, par ailleurs, de calculer la contrainte de compression maximale sur le béton en zone inférieure et de s'assurer qu'elle ne dépasse pas une contrainte limite de compression (admissible).

4. Notations

Nous avons adopté les notations préconisées par le nouveau règlement de calcul du béton armé aux états limites (B.A.E.L.) telles qu'elles figurent dans l'annexe C.

Elles sont inspirées des recommandations du Comité Euro-International du Béton.

C.1. - Principes

C. 1.1. - Majuscules romaines :

Elles désignent :
- les actions et sollicitations (forces, moments),
- les grandeurs géométriques à l'exception des longueurs,
- les modules de déformation et d'élasticité.

C. 1.2. - Minuscules romaines :

Elles désignent :
- les longueurs et les quantités géométriques ayant la dimension d'une longueur,
- les densités de forces réparties,
- les résistances,
- certains coefficients.

(1) 1 mégapascal (MPa) = 1 N/mm^2 = 1 MN/m^2.

C. 1.3. - Majuscules grecques :

Elles ne sont employées que dans quelques cas consacrés par l'usage.

C. 1.4. - Minuscules grecques :

Elles désignent :
- les contraintes,
- les grandeurs réduites (sans dimensions) telles que les déformations relatives,
- certains coefficients.

C. 1.5. - Indices :

Les indices sont employés pour distinguer des grandeurs de même nature, représentables par le même symbole mais se rapportant à des matériaux, des âges ou des rôles mécaniques différents.

Les indices sont constitués, sauf exceptions, par une ou plusieurs minuscules romaines, ou une majuscule romaine éventuellement suivie de minuscules ou de chiffres.

Un indice ou une suite d'indices *peuvent être omis* dans le but d'alléger l'écriture s'il ne risque pas d'en résulter de confusion.

C. 1.6. - L'apostrophe : (voir Nota)

L'apostrophe peut servir à distinguer deux grandeurs de même nature différant par leur emplacement géométrique. On peut ainsi repérer les fibres (ou membrures) supérieure et inférieure, ou encore les armatures comprimées ou tendues d'une même section.

C. 1.7. - Surlignage :

Le surlignage indique qu'il s'agit d'une valeur admissible ; il s'applique aux contraintes et aux sollicitations. Appliqué aux contraintes de rupture des éprouvettes, il signifie « valeur moyenne ».

C. 1.8. - L'astérisque * renvoie aux paragraphes correspondants des règles BAEL ; exemple (*A2. 1,21).

Les renvois sans astérisque correspondent aux paragraphes du présent ouvrage ; exemple (C.3.2.).

Nota : Dans le présent document, on a opté pour l'usage suivant de l'apostrophe :
- distinction entre fibre supérieure (avec apostrophe) et fibre inférieure (sans) par exemple : v' et v
- distinction entre section d'armatures comprimées (A'_s) et tendues (A_s)
- distinction entre contrainte dans les armatures : compression (avec ') et traction (sans) ; par exemple σ'_s , f'_{su} et σ_s, f_{su}
- en ce qui concerne le béton, on n'utilise pas l'apostrophe car on fait la distinction par les indices c pour la compression, et t pour la traction, ex : f_{cj} et f_{tj}.

C.2. - Notations utilisées (dans ce document)

Majuscules romaines :

A : aire de la section des armatures tendues
A' : aire de la section des armatures comprimées
A_t : aire de la section d'une nappe d'armatures transversales
B : aire d'une section de béton
E_{ij} : module élastique instantané du béton à l'âge j
E_{vj} : module élastique à long terme du béton (à partir de l'âge j de mise en charge)
E_s : module élastique de l'acier
F : force ou action en général
G : ensemble des actions permanentes
I : moment d'inertie d'une section
L : longueur totale d'une poutre
N-KN-MN : newton, kilonewton, méganewton
N : effort normal
N_{Gu} : effort normal ultime ramené au centre de gravité G
M_A : moment fléchissant dû aux actions
  M_G : dû aux actions permanentes G
  M_Q : dû aux charges d'exploitation Q
M_{Au} : moment ultime rapporté à l'axe des armatures tendues
M_{Gu} : moment ultime rapporté au centre de gravité G de la section
M_{ru} : moment résistant ultime
  M_o : moment en travée supposée libre
  M_t : moment en travée
  M_w : moment sur l'appui à gauche (à l'ouest) d'une travée
  M_e : moment sur l'appui à droite (à l'est)
  } Poutres continues
Q : ensemble des actions dues aux charges d'exploitation
R : réaction d'appui
V : composante verticale d'une force F ; Effort tranchant
V_u : effort tranchant ultime

Minuscules romaines :

a ou l_x : largeur d'une dalle dans le sens de la petite portée
b ou l_y : longueur d'une dalle dans le sens de la grande portée
a et b : distances respectives (à gauche et à droite) d'une action ponctuelle, aux appuis d'une poutre
b_o : largeur d'une section rectangulaire ou de l'âme d'une poutre en Té
b : largeur de la table d'une poutre en Té
b (en indice) : béton
c (en indice) : compression
c_g : plus grosse dimension des granulats
d : distance des armatures tendues à la fibre extrême comprimée
d' : distance des armatures comprimées à la fibre extrême comprimée
e : excentrement d'une force
f : contrainte caractérisant la résistance du béton (sur éprouvette)
f_{cj} : contrainte caractéristique du béton à la rupture en compression à l'âge j

f_{tj} : contrainte caractéristique du béton à la rupture à l'age j, en traction
g/mc^t : charge permanente uniformément répartie par mètre courant
h : hauteur totale d'une section
h_o : épaisseur de la table d'une section en Té
i : rayon de giration $i = \sqrt{\frac{I}{B}}$
i (en indice) : « instantané »
j (en indice) : âge en jours
l : longueur - portée ; en indice : longitudinal
l_f : longueur de flambement
l_s : longueur de scellement droit
n : coefficient d'équivalence acier-béton $= n = \frac{E_s}{E_b}$, $\left(\frac{E_s}{E_i} \text{ ou } \frac{E_s}{E_{vj}}\right)$
p : pourcentage mécanique des aciers par rapport au béton
q/mc^t : charge d'exploitation uniformément répartie par mètre courant
s : (en indice) acier
s_t (ou s) : espacement des armatures transversales
u : (en indice) : ultime
v : distance du centre de gravité d'une section à la fibre extrême tendue (ou inférieure)
v' : distance du centre de gravité d'une section à la fibre extrême comprimée (ou supérieure)
v : (en indice) à long terme
y : profondeur de la fibre neutre des déformations par rapport à la fibre comprimée
z : bras de levier

Minuscules grecques :

alpha α : angle, rapport ou coefficient
gamma γ : coefficient de sécurité
γ_b : sur le béton (1,5 en général)
γ_s : sur les aciers (1,15 en général)
γ_G : sur les actions permanentes (1,35 en général)
γ_Q : sur les charges d'exploitation (1,5 en général)
delta δ : coefficient dynamique
epsilon ϵ : déformation relative Δl d'une longueur l $\epsilon = \frac{\Delta l}{l}$
ϵ_{bu} : raccourcissement ultime du béton
ϵ_{su} : allongement ultime de l'acier
ϵ_b : raccourcissement du béton sous une contrainte de compression σ_b
ϵ_s : allongement de l'acier sous une contrainte de traction σ_s
ϵ_s' : raccourcissement de l'acier sous une contrainte de compression σ_s'

lambda λ { : coefficient d'élancement (flambement)
: rapport entre sections d'armatures comprimées et tendues
mu μ : coefficient de moment réduit } en flexion composée
nu ν : coefficient d'effort normal réduit } en flexion composée
ν : coefficient de Poisson
ro ρ : rapport de deux dimensions
ρ : pourcentage géométrique d'armatures par rapport au béton
$\rho = \frac{a}{b}$ rapport des deux dimensions a et b d'une dalle ($a \leqslant b$ $\rho \leqslant 1$)
sigma σ : contrainte normale dans une structure en général
σ_{bc} = contrainte de compression du béton (l'indice c est en général supprimé quand il n'y a pas d'ambiguïté)
σ_{bt} = contrainte de traction du béton
σ_s = contrainte de traction dans l'acier (ou σ_{st})
σ_s' = contrainte de compression dans l'acier (ou σ_{sc})
to τ : contrainte tangente ou de cisaillement
τ_s : contrainte d'adhérence
phi ϕ : diamètre d'une armature
eta η : coefficient de fissuration propre à un acier (lisse $\eta = 1$ ou H.A. $\eta = 1{,}6$)
psi ψ : coefficients (définis dans les Directives Communes)
ψ_s : coefficient d'adhérence des aciers.

5. Unités et orientations

5.1. Unités

Masses : le kilogramme - masse : kgm
ou la tonne - masse : tm

Par exemple, la masse volumique du béton armé est prise égale à 2,5 t/m^3 ;

Forces :

- *unité longtemps utilisée*, (et encore quelquefois), le kilogramme - force : kgf = force appliquée à une masse de 1 kgm soumise à une accélération g = 9,81 m/s/s (attraction terrestre)

- *unité adoptée aujourd'hui* : (système International)

le Newton : N = force appliquée à une masse de 1 kgm soumise à une accélération $\gamma = 1$ m/s/s/

d'où $$1\text{ N} = \frac{1\text{ kgf}}{9{,}8} = 0{,}102\text{ kgf}$$

et $$1\text{ daN} = 1{,}02\text{ kgf}$$

L'habitude que semblent adopter les calculateurs est d'exprimer les forces en Kilonewton = kN (comme dans la norme AFNOR P06001, par exemple).

Par ailleurs, une masse de 1 kgm soumise à la pesanteur terrestre (g = 9,8 m/s/s) engendrera une action de charge de 9,8 N sur la structure porteuse. Toutefois, il est, en général, admis dans la pratique de négliger la différence de 2 % entre 9,8 et 10 ; c'est-à-dire qu'on admettra qu'une masse de 1 t engendre, par pesanteur, une force de 10 kN (et non 9,8) sauf si l'on tient à une précision rigoureuse.

Contraintes

Lorsqu'une section est soumise à un effort normal (compression ou traction) la contrainte correspond à la force appliquée par unité de section.

Unités longtemps utilisées :

Pour le béton : le kgf/cm^2
Pour l'acier : le kgf/mm^2

- *Unités transitoires* (avec les forces en daN)

Pour le béton : le bar = 1 daN/cm^2 $\simeq$ 1 kgf/cm^2
Pour l'acier : l'hectobar = 1 daN/mm^2 $\simeq$ 1 kgf/mm^2

- *Unités adoptées aujourd'hui* (système international)

le N/mm^2 (pour le béton comme pour l'acier)
On définit le pascal : 1 N/m^2
On a donc 1 N/mm^2 = 1 pascal x 10^6 = *1 mégapascal : MPa*
d'où 1 MPa = 10 bars $\simeq$ 10 kgf/cm^2

$$1 \text{ Mpa} = \frac{1}{10e} \text{ hectobars} \simeq \frac{1}{10} \text{ kgf/mm}^2$$

Moments fléchissants

Les forces étant habituellement exprimées en Kilonewton les moments seront exprimés en kilonewton x mètre (kN.m).

Toutefois, pour aboutir à des contraintes en MPa (1N/mm^2 = 1 MN/m^2) les moments devraient être exprimés en MN.m ; on adoptera donc le kN.m 10^{-3}.

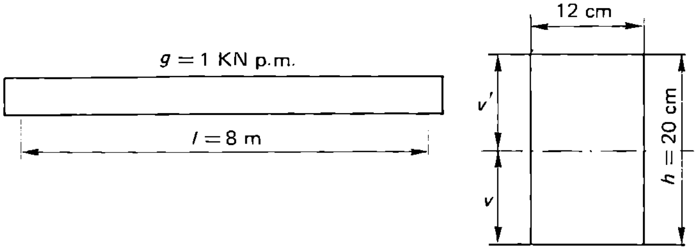
Sections, moments statiques et d'inertie : par homogénéité ces grandeurs devraient être exprimées en m^2, m^3 et m^4 ; or, l'habitude est de les exprimer en cm^2, cm^3 et cm^4 (les dimensions des sections étant, en pratique, exprimées en cm) ; on exprimera donc respectivement ces grandeurs en cm^2 10^{-4}, cm^3 10^{-6} et cm^4 10^{-8} (équivalences métriques).

En définitive : on adoptera donc le système d'unité cohérent suivant :

Grandeurs à mesurer	*en théorie*	*en pratique*
Masses	t/m^3	t/m^3
Forces	MN	kN (10^{-3})
Longueurs	m	m ou cm (10^{-2})
Moments fléchissants	MN.m	kN.m (10^{-3})
Sections	m^2	cm^2 (10^{-4})
Moments statiques	m^3	cm^3 (10^{-6})
Moments d'Inertie	m^4	cm^4 (10^{-8})
Contraintes	MN/m^2 = 1 MPa	MPa

Nota : Pour l'équivalence avec les unités théoriques (MN et m) qui conduisent au MPa (MN/m^2) il suffit de multiplier les résultats numériques obtenus avec les unités utilisées en pratique par la puissance de 10 convenable indiquée entre parenthèse dans la dernière colonne.

Exemple :



$$M = \frac{gl^2}{8} = \frac{1 \times 8^2}{8} = 8 \text{ kN.m} = 8.10^{-3} \text{ MN.m}$$

$$v = \frac{h}{2} = 10 \text{ cm soit } 10.10^{-2} \text{ m}$$

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{12 \times 20^3}{12} = 8000 \text{ cm}^4 \text{ soit } 8000 \times 10^{-8} \text{ m}^4$$

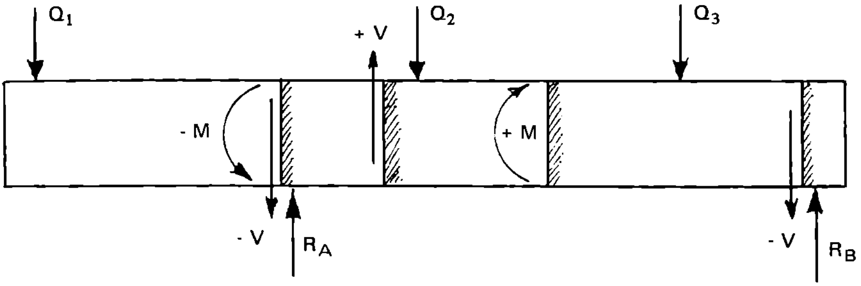
$$\text{Contrainte } \sigma = \frac{Mv}{I} = \frac{8.10^{-3} \times 10.10^{-2}}{8000\ 10^{-8}} = \frac{8.10^{-4}}{8.10^{-5}} = 10 \text{ MPa}$$

5.2. Orientations

Dans le calcul d'une section, on considère, *par convention*, les sollicitations des forces agissant *à gauche* de la section étudiée.

Les efforts tranchants sont considérés comme positifs s'ils sont dirigés de bas en haut (cisaillement de la partie de gauche sur la partie de droite).

Les moments fléchissants sont comptés *positifs* s'ils tournent dans le sens des aiguilles d'une montre ; il s'agit du moment des actions (et réactions) situées à gauche de la section étudiée ; le moment résistant du couple interne qui s'y oppose est évidemment orienté en sens inverse.



MODULE A - PRESCRIPTIONS GÉNÉRALES ET RÉGLEMENTAIRES

CHAPITRE A.1

RÉGLEMENTATION EN VIGUEUR

Le décret n° 83.905 du 7 octobre 1983 a approuvé la rédaction des Règles BAEL 83 rendues obligatoires à partir du 1er janvier 1985 date à laquelle a expiré la prolongation accordée pour l'application des Règles CCBA 68.

Les autres prescriptions réglementaires auxquelles il convient de se référer sont citées dans les textes qui suivent et présentées succinctement et «élaguées» pour la clarté du présent document.

D'une façon générale, il conviendra pour des études d'ouvrages réels de se référer aux textes officiels complets et détaillés et de les appliquer dans leur intégralité.

CHAPITRE A.2

DOMAINE D'APPLICATION

Les présentes règles de calcul sont applicables à tous les ouvrages en béton armé dont le béton est constitué de granulats naturels normaux et dont le dosage en ciment est, au moins, de 300 à 400 kg/m^3.

Sont considérées «en béton armé» les pièces qui sont encore aptes à jouer leur rôle dans la structure dont elles font partie, lorsque *la résistance à la traction par flexion de leur béton constitutif est supposée nulle.*

De nombreux ouvrages sont constitués en totalité ou en partie d'éléments de structures susceptibles d'être justifiés par des règles dont l'expérience a montré la validité et qui permettent d'éviter des calculs laborieux dont la précision risquerait d'ailleurs d'être illusoire.

On distingue :

A.2.1. Les «constructions courantes» dans lesquelles les charges d'exploitation sont modérées : les valeurs de ces charges sont alors au plus égales à deux fois celles des charges permanentes ou à 5 kN/m^2 (bâtiments en général...).

A.2.2. Les «constructions industrielles» dans lesquelles les charges d'exploitation sont relativement élevées : les valeurs de ces charges sont alors supérieures à deux fois celles des charges permanentes ou à 5 kN/m^2 ; elles comprennent, le plus souvent, des charges localisées importantes, éventuellement mobiles, et pouvant donner lieu à des effets dynamiques (usines, ateliers, entrepôts...).

A.2.3. Les «constructions spéciales» dans lesquelles certaines parties de la structure peuvent être assimilées à des éléments de «constructions courantes», d'autres à des éléments de «constructions industrielles», d'autres enfin relèvent de l'application des règles générales (ponts, barrages, réservoirs, grandes couvertures, ...).

CHAPITRE A.3

LES MATÉRIAUX

Ce document n'est pas un cours de matériaux ; nous n'indiquerons donc, succinctement, que les caractéristiques du béton et des aciers telles qu'elles sont nécessaires pour l'application des règles de calcul.

A.3.1. Le béton

a) Résistance caractéristique en compression :

Elle est basée et contrôlée sur des éprouvettes cylindriques de 16 cm de diamètre et 32 cm de hauteur, écrasées en compression centrée (pour une dimension $cg \leqslant 40$ mm)*.

Les conditions pour qu'un béton puisse être considéré comme atteignant la *résistance caractéristique requise* f_{cj} sont définies dans l'Instruction Technique relative au contrôle de la qualité des bétons (15 janvier 1979) ; on peut ainsi la résumer *pour les cas les plus courants* :

- soit n, le nombre de prélèvements (la valeur pour un prélèvement étant la moyenne de trois éprouvettes).
- f_c min est *la plus faible valeur* trouvée sur les n prélèvements.
- $\overline{f_{cj}}$ (f_{cj} surligné) est *la valeur moyenne* des n prélèvements. La règle de conformité est la suivante :
- cas où $n = 3$ (au moins) $\overline{f_{cj}} \geqslant f_{cj} + 2{,}7$ (MPa)

$$f_c \text{ min} \geqslant f_{cj} - 3{,}0 \text{ (MPa)}.$$

- cas ou $n \geqslant 15$, on calcule alors l'écart type**

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma\,(f_{cj} - \overline{f_{cj}})^2}{n-1}}$$

* Si $cg > 40$ mm le diamètre ϕ de l'éprouvette doit être $> 25\sqrt[2]{cg}$ (conférence à l'I.T.B.T.P. par MM Dreux et Gorisse le 4 mars 1980) ; il est rappelé que cg est la plus grosse dimension des granulats utilisés.

** L'Instruction Technique du 15 Janvier 1979 précise également les règles de conformité dans les cas où $n = 6$, 9 ou 12 ; il conviendra de s'y reporter.

il faut $\overline{f_{cj}} - 1{,}2\,s \geqslant f_{cj}$

$f_c \min \geqslant f_{cj} - 3{,}0.$

Sauf stipulation contraire l'âge du béton j pour les essais de contrôle est fixé à $j = 28$ jours.

On peut admettre, à priori, les valeurs approximatives suivantes, dans les conditions courantes : (* B.1)

$\overline{f_{c28}}$ est la résistance moyenne à viser dans l'étude de la composition du béton.

Qualité des bétons	*Dosage en ciment* ~	*Résistance moyenne* $\overline{f_{c28}}$ *(à viser)*	*Résistances caractéristiques pour j = 28 jours*	
			en comp. f_{cj}	en tract. f_{tj}
Béton faible résistance	300 kg/m^3	20 à 25 MPa	16 MPa	1,6 MPa
Béton courant	350 kg/m^3	25 à 30 MPa	20 MPa	1,8 MPa
Béton de haute résistance	400 kg/m^3	30 à 35 MPa	25 MPa	2,1 MPa
Béton de résistance exceptionnelle	400 kg/m^3 (+ adj^t éventuellement)	35 à 40 MPa	30 MPa	2,4 MPa

L'écart-type s, des résistances en compression, dépend évidemment de la dispersion des résultats tributaires de nombreux facteurs ; on peut admettre (à notre avis) qu'il se trouve en général, entre 2 à 5 MPa (pour un lot de béton).

Si l'on veut évaluer, à priori, la résistance à un âge $j < 28$ jours, on peut la calculer par la formule :

$$f_{cj} = 0{,}685\, f_{c28} \log (j + 1) \qquad \text{(*A2.1,11)}$$

Si j est très grand ($\rightarrow \infty$) on peut admettre :

$$f_{c\,\infty} \cong 1{,}1\, f_{c28}.$$

b) Résistance caractéristique en traction

Elle est définie *conventionnellement* (à j jours) par la relation :

$$f_{tj} = 0{,}6 + 0{,}06\, f_{cj} \ \text{(en MPa)} \qquad \text{(*A.2.1,12)}$$

(à condition que $f_{cj} \leqslant 40$ MPa, ce qui est le cas général).

c) Contraintes limites

• *à l'état limite ultime (E.L.U.)* : l'état limite ultime correspond (à la limite) à l'équilibre entre les sollicitations d'action majorées ($\gamma_G\ \gamma_Q$) et les sollicitations résistantes calculées en supposant que les matériaux atteignent les limites de rupture minorée ($\gamma_b\ \gamma_s$)

- la contrainte ultime du béton *en compression* est :

$$f_{bu} = \frac{0{,}85}{\gamma_b} \times f_{cj} \ \text{avec } \gamma_b = 1{,}5 \qquad \text{(*A.4.3,4)}$$

$\gamma_b = 1{,}15$ en cas de combinaisons accidentelles.

* Il est rappelé que l'astérisque renvoie aux paragraphes correspondants du BAEL indiqués entre parenthèses.

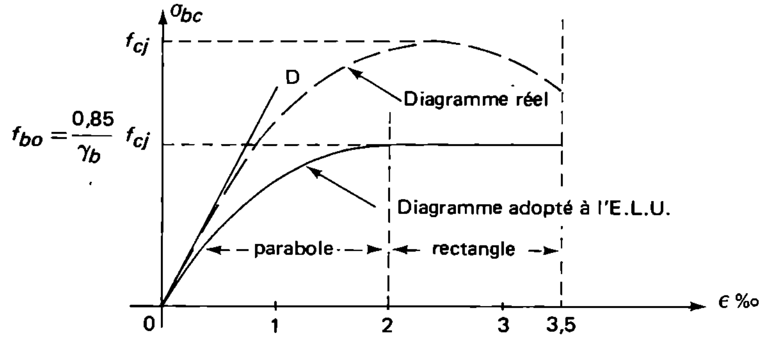
- la contrainte ultime de *cisaillement* est, avec armatures transversales droites :
cas normaux : τ_u = la plus basse des deux valeurs, 0,13 f_{cj} ou 4 MPa
cas où la fissuration est préjudiciable.
τ_u = la plus basse des deux valeurs : 0,10 f_{cj} ou 3 MPa (*A.5.1,21)

• *a l'état limite de service (E.L.S)* : l'état limite de service correspond (à la limite) à l'équilibre entre les sollicitations d'actions réelles (non majorées) et les sollicitations résultantes calculées sans dépassement des contraintes limites qui sont telles, que l'on peut admettre que l'on ne dépasse pas les limites élastiques des matériaux.

La contrainte limite de service à ne pas dépasser en compression est :

$$\overline{\sigma_b} = 0{,}60\, f_{cj} \qquad (*A.4.5,2)$$

d) Diagramme contraintes - déformations (* A.4.3,41)



Le diagramme en parabole - rectangle est utilisé pour le calcul à l'état limite ultime ; dans le calcul à l'état limite de service, on suppose que l'on reste dans le domaine élastique (droite OD).

e) Module d'élasticité (voir nota 1)

- *sous charges instantanées* (< 24 h)

On admet $E_{ij} = 11000\, f_{cj}^{\,1/3}$ (en MPa)

On peut admettre pour les très grandes valeurs de j ($j \to \infty$) :

$$E_{i\,\infty} = 11000\,(1{,}1\, f_{c28})^{1/3} \qquad (*\ A.2.1,21)$$

- *sous charges de très longue durée* (action permanente)

On admet (compte tenu du fluage) : $E_{vj} \simeq \frac{1}{3} E_{ij}$

Nota 1 : Il est rappelé que le module d'élasticité est le rapport entre la contrainte appliquée σ et la déformation relative $\frac{\Delta_l}{l}$ qui en résulte : $E = \frac{\sigma}{\frac{\Delta_l}{l}}$ d'où $\frac{\Delta_l}{l} = \frac{\sigma}{E}$.

f) Retrait

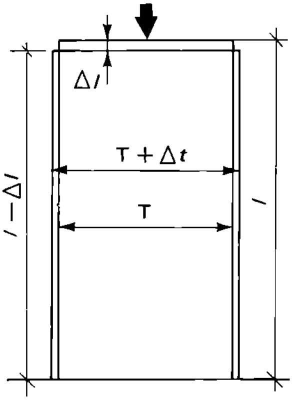
Dans le cas des pièces de dimensions courantes à l'air libre, on admettra un raccourcissement relatif de retrait égal à :

$\frac{\Delta l}{l} = 4$ à $5\ 10^{-4}$ dans les régions très sèches

$\frac{\Delta l}{l} = 3\ 10^{-4}$ dans le quart S.E. de la France.

$\frac{\Delta l}{l} = 2\ 10^{-4}$ dans le reste de la France (* A.2.1,22)

g) Coefficient de Poisson (*A.2.1,3)



Δl raccourcissement relatif longitudinal.

Δt augmentation relative de la dimension transversale.

Le coefficient de Poisson est $\nu = \frac{\Delta t\,\%}{\Delta l\,\%}$ on prend $\nu = 0{,}20$ en principe ; Dans les zones fissurées, il est pris égal à zéro.

D'après le nouveau règlement BAEL 83 on adoptera $\nu = 0$ à l'E.L.U.

A l'E.L.S. la fissuration est préjudiciable (ou très) on adoptera $\nu = 0.20$.

A.3.2. Les aciers

a) Classification

On se reportera aux normes AFNOR suivantes :

A 35-015 Armatures pour B.A. (ronds lisses)

Cette norme concerne les *aciers naturels* F*e* E 22 et F*e* E 24.

A 35-016 et A 25-017 Armatures pour B.A. (barres à hautes adhérences F*e* E 40 et F*e* E 50).

A 35-18 Armatures pour B.A. (aptitude au soudage).

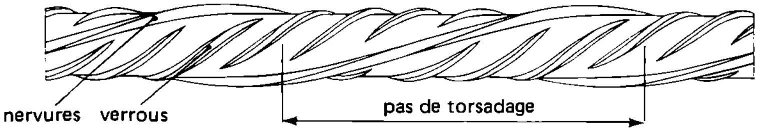
Les barres à hautes adhérences sont classées en trois types :

- *Armatures à haute adhérence* obtenues par laminage à chaud d'un acier naturellement dur . . . . TYPE 1

- *Armatures à haute adhérence* obtenues par laminage à chaud suivi d'un *écrouissage* sans réduction de section (par exemple par torsion ou traction)
Très utilisées . . . . TYPE 2

- Armatures à haute adhérence obtenues par laminage à chaud suivi d'un écrouissage par tréfilage et (ou) laminage à froid entraînant une forte réduction de section . . . . TYPE 3

Acier torsadé à froid à verrous obliques (Type 2)



On utilise également des treillis soudés classés dans le type 4. On les trouve en rouleaux si $\phi \leqslant 5$ mm ou en panneaux. Ils sont à mailles rectangulaires pouvant aller de 50 x 75 mm jusqu'à 200 x 300 mm.

b) Diamètres normalisés

Ces aciers se trouvent dans les diamètres suivants : 6 - 8 - 10 -12 - 14 - 16 - 20 - 25 - 32 et 40 mm ; ils permettent de réaliser les sections ci-après (en mm^2).

Sections

ϕ en mm		6	8	10	12	14	16	20	25	32	40	50 (nota)
Poids en kg au ml		0,222	0,394	0,616	0,887	1,208	1,578	2,466	3,853	6,313	9,764	15,413
Sections en mm^2	1 barre	28,3	50,3	78,5	113	154	201	314	491	804	1257	1963
	2 barres	56,5	100,6	157	226	308	402	628	982	1608	2513	3927
	3 barres	84,8	150,8	235	339	462	603	942	1473	2413	3770	5890
	4 barres	113	201	314	452	616	804	1257	1963	3217	5027	7854
	5 barres	141,4	251,3	392	565	770	1005	1571	2454	4021	6283	9817

Nota : Les ϕ 50 ne sont utilisés *qu'exceptionnellement.*

c) Nuances

Les aciers à béton présentent différentes «nuance» (4 principales) qui correspondent à leur qualité de limite élastique et de résistance. Le caractère mécanique servant de base aux calculs justificatifs est la *limite d'élasticité garantie fe.* Les différentes nuances utilisées et leur caractéristiques sont indiquées dans le tableau ci-après.

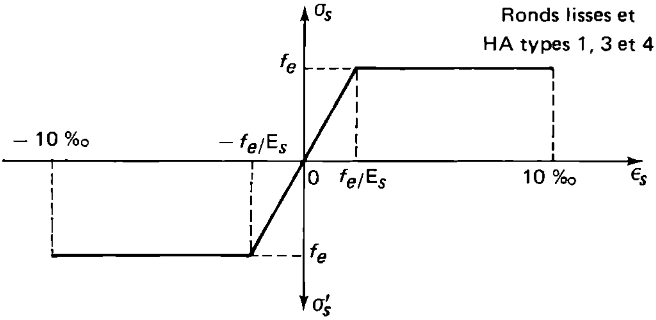
Nuances

	Nuances	*Limite d'élasticité f_e* (en MPa)	*Contrainte de rupture f_s* (en MPa)	*Allongement de rupture* %
Aciers naturels	Fe E 22 } Kgf/mm^2	215	330 à 490	22
Ronds lisses	Fe E 24 } Kgf/mm^2	235	410 à 490	25
Aciers à haute adhérence	Fe E 40 } *hb* Fe E 50 } *hb*	400 500	480 550	14 12

d) Diagrammes déformations-contraintes

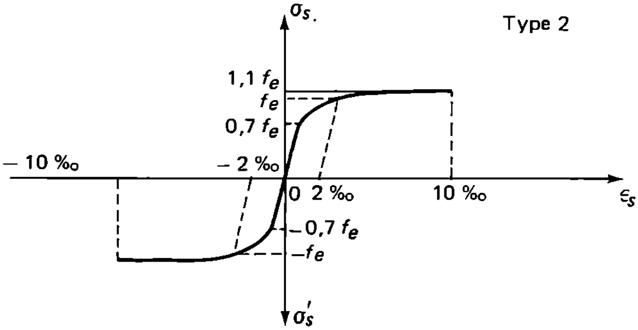
Les diagrammes déformations (ϵ_s) - contraintes (σ_s) à considérer pour l'application de l'article A.4.3.* sont définis ci-après : ils sont symétriques par rapport à l'origine 0 des coordonnées.

- *Cas des aciers naturels ou fortement écrouis* (*A2.2,21)



- *Cas des aciers écrouis par traction ou (et) torsion* (*A2.2,22)

- Lorsqu'une grande précision est recherchée on applique le diagramme ci-dessous.



Pour ces aciers la limite d'élasticité f_e est dite à 2 ‰ par convention ; elle s'obtient en traçant à partir de l'abscisse 2 ‰ une parallèle à la tangente à l'origine.

e) Module d'élasticité

Le module d'élasticité longitudinal de l'acier est pris égal à $E_s = 200.000$ MPa.

f) Contraintes limites

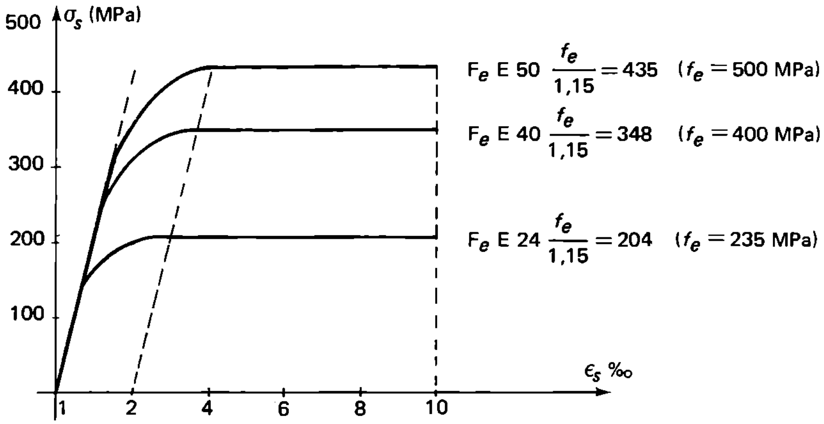
- *à l'état limite ultime* : on adoptera un diagramme contraintes-déformations déduit des diagrammes précédents par affinité parallèle à la tangente à l'origine dans le rapport $\dfrac{1}{\gamma_s}$.

* Art. A.4.3. du B.A.E.L. état limite ultime de résistance.

γ_s est, en général, pris égal à 1,15. *Lorsque la nature de l'acier est ignorée*, on adopte un diagramme correspondant à la combinaison la plus défavorable des deux diagrammes possibles ; elle consiste à prendre le diagramme des aciers écrouis (type 2) pour les contraintes inférieures à f_e et celui des aciers naturels ou fortement écrouis (types 1, 3 et 4) pour les contraintes supérieures à f_e. (*A2.2,23)

S'il s'agit d'acier H.A. type 2 *d'une façon certaine*, la contrainte limite ultime peut être : $f_{su} = \dfrac{1{,}1\, f_e}{\gamma_s}$ (selon le graphique type 2).

On pourra donc, *en pratique*, utiliser les graphiques simplifiés de la figure ci-après :



Graphiques simplifiés utilisables en pratique pour les calculs à l'état limite ultime et pour les trois nuances les plus utilisées. (Nature de l'acier ignorée).

- *à l'état limite de service*

- *Cas où la fissuration est peu nuisible (cas général).* Aucune vérification particulière n'est demandée (en dehors de la vérification à l'état limite ultime).

- *Cas où la fissuration est préjudiciable (milieu humide, intempéries)*

$\overline{\sigma_s}$ = la plus petite des deux valeurs (limite admissible) : (*A.4.5,33)

$$\frac{2}{3} f_e \quad \text{et} \quad 150\,\eta \quad \text{(en MPa)}.$$

η est un «coefficient de fissuration» qui dépend de la plus ou moins bonne adhérence.

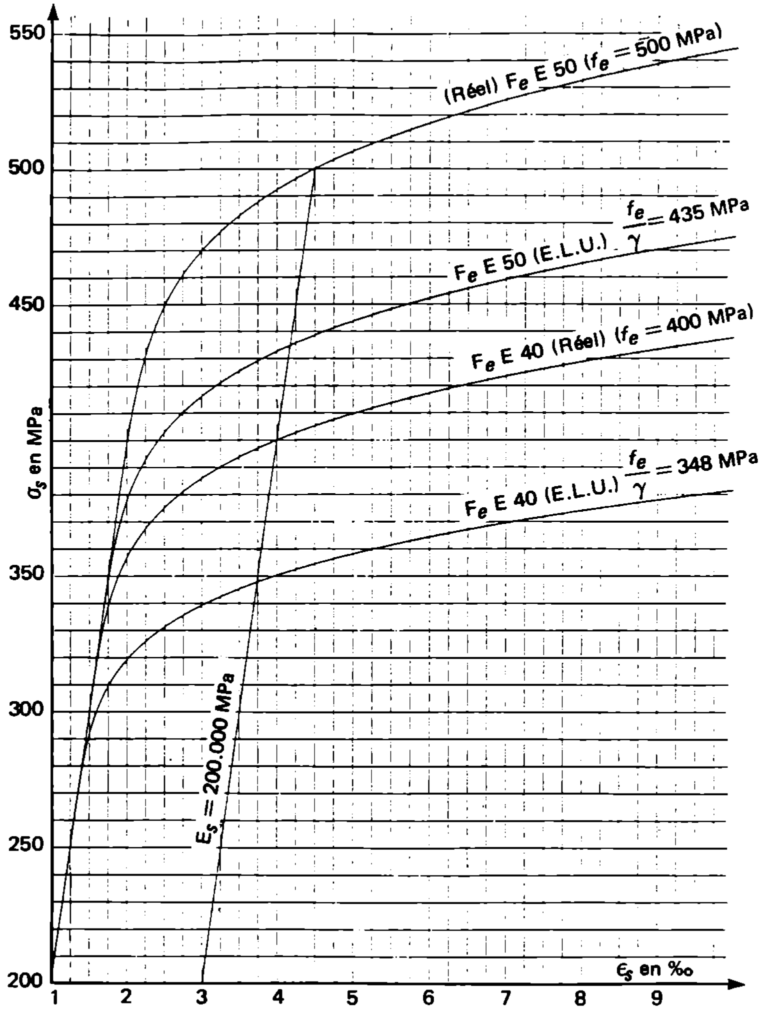
$\eta = 1$ pour les ronds lisses
$\eta = 1{,}6$ pour les aciers H.A. (fissures plus fines).

- *Cas où la fissuration est très préjudiciable (milieu agressif)*

$\overline{\sigma_s}$ = la plus petite des deux valeurs : 0,5 f_e et 110 η (en MPa)

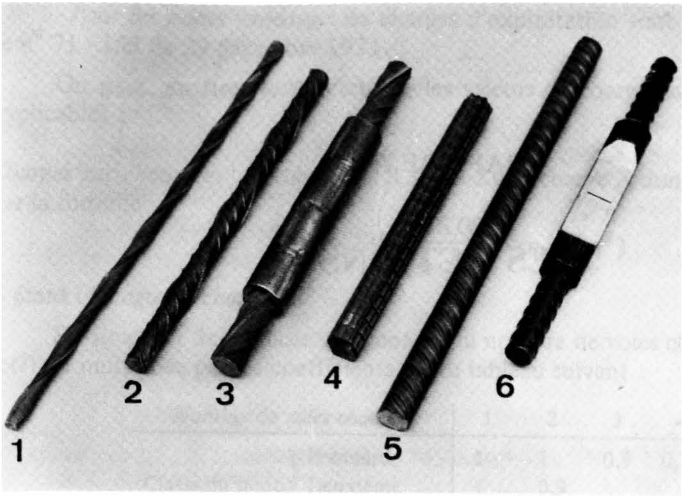
Nota : Si l'on dispose d'acier écroui du type 2 dont *on connait la valeur réelle de* f_e on pourra utiliser la courbe correspondante du graphique ci-après, sous réserve du Nota en bas de de la page suivante.

Diagrammes de calculs des aciers de type 2 (aciers écrouis)



Nota - le seul diagramme qui reste applicable en pratique est celui concernant le cas des aciers naturels ou fortement écrouis, c'est-à-dire un diagramme plafonné à la valeur f_e jusqu'à $\epsilon_s = 10$ ‰ (en haut page 24 précédente).

Les Règles BAEL 83 indiquent qu'il reste cependant «loisible» d'utiliser une forme de courbe se rapprochant du diagramme réel de l'acier employé (comme par exemple celui utilisé page 26) à condition de se référer à la valeur garantie de la limite d'élasticité f_e et de *contrôler* la résistance prise en compte pour l'allongement ultime $\epsilon_s = 10$ ‰. Etant donné le déclin actuel de la production des aciers ayant un diagramme tel que celui utilisé page 26 (moins de 20 % de l'ensemble, principalement sous forme de barres de faible diamètre), il ne sera que rarement usé de la liberté offerte par les Règles BAEL.



Armatures à haute adhérence :

1 Acier Tor (ϕ 5 à 10 mm)

2 Acier Tor à verrous (ϕ 12 à 40 mm)

3 et 6 Manchons de raccordement d'armatures à haute adhérence

4 Acier quadrillé

5 Acier Alpen

g) Jonction des barres :

Les jonctions entre barres peuvent se réaliser par recouvrement (voir § C.5.) par manchonnage (acier H.A. seulement) ou par soudage (en bout ou par recouvrement) ; dans ce dernier cas les armatures doivent présenter certaines caractéristiques de «soudabilité» (voir norme AFNOR A 35-18).

CHAPITRE A.4

LES ACTIONS

A.4.1. Définition

Les actions sont les forces et les couples dus aux charges appliquées (permanentes, d'exploitation, climatiques, accidentelles...) ou aux déformations imposées à une construction (variations de température, dénivellation d'appuis...).

On distingue :

- les actions permanentes notées G
- les actions variables notées Q
- les actions accidentelles notées F_A dues à des phénomènes rares.

A.4.2. Actions permanentes

Ce sont, en général, les actions dues aux charges de poids propre pour lequel la masse volumique du béton armé est pris égale à $2,5\ t/m^3$. De plus, il conviendra de tenir compte de tous les éléments entrant dans le poids propre *total* : revêtements, étanchéïté, cloisons...

A.4.3. Actions variables

Elles sont, en général, précisées dans le Cahier des Clauses Techniques Particulières (C.C.T.P.) concernant l'ouvrage en question.

a) Charges d'exploitation

- *Pour les bâtiments* : les charges d'exploitation à prendre en compte dans les calculs sont fixées dans la norme AFNOR P 06 - 001 (avril 1978) ; on peut, en général, adopter les charges suivantes sur les planchers (y compris les effets dynamiques courants) :

habitations et bureaux	2,5 kN/m²
balcons, salles de conférence	3,5 kN/m²
locaux scolaires et sportifs	5,0 kN/m²
bibliothèques, archives	6 à 8 kN/m²

- *Pour les ponts - routes* : les charges d'exploitation sont fixées par la circulaire n° 71 - 155 du 29 décembre 1971.

On peut, en tirer succinctement les valeurs de charges suivantes couramment applicables :

Charges sur chaussées , système A : il s'agit d'une charge A dont la masse est donnée par la formule :

$$A(l) = 230 + \frac{36.000}{l_e + 12} \text{(en kg/m}^2\text{)}$$

l_e étant la *longueur chargée.*

En fonction de la classe du pont et du nombre de voies chargées*, la valeur de A (l) est multipliée par les coefficients a_1 du tableau suivant :

Nombre de voies chargées		1	2	3	4	⩾5
Classe du pont.	Première	1	1	0,9	0,75	0,7
	Deuxième	1	0,9			
	Troisième	0,9	0,8			

En outre, lorsque la valeur de la charge répartie, trouvée après application des coefficients ci-dessus, est inférieure à (400 – 0,2 l) kg/m², expression dans laquelle la longueur chargée l est exprimée en mètres, c'est cette dernière valeur qui doit être prise en compte.

La charge $A_1 = a_1$ A, obtenue après application du paragraphe précédent est multipliée par un coefficient $a_2 = \frac{v_0}{v}$, v étant la largeur d'une voie et v_0 ayant les valeurs suivantes :

3,5 m pour les ponts de première classe ;
3,0 m pour les ponts de deuxième classe ;
2,75 m pour les ponts de troisième classe.

La charge $A_2 = a_1 \, a_2$ A ainsi obtenue est appliquée uniformément sur toute la largeur de chacune des voies considérées.

- *Charges sur trottoirs et pistes cyclables :*

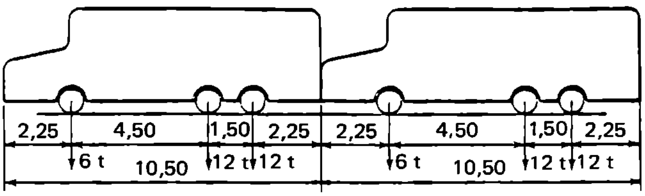
On admet une charge uniforme de 450 kg/m².

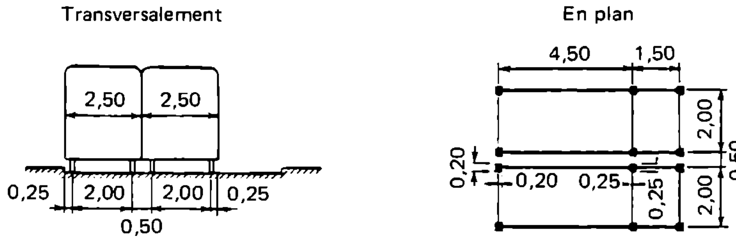
Charges sur chaussées système B

* Les éléments du système B sont schématisés ci-dessous, les longueurs étant exprimées en mètres et les masses en tonnes.

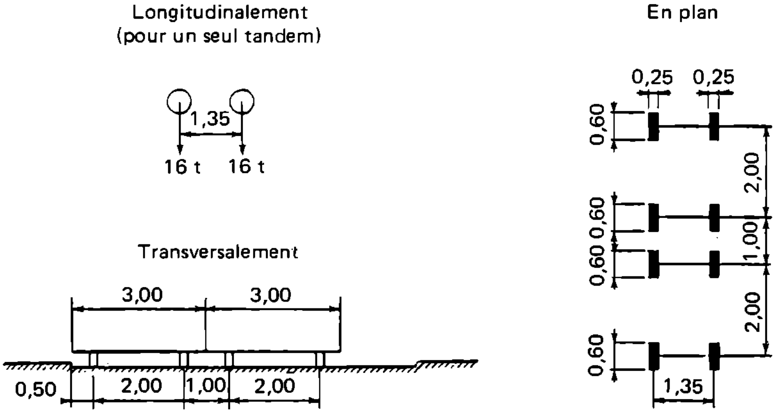
Système B_c (camion)

Longitudinalement
(masses relatives à une file de camions)

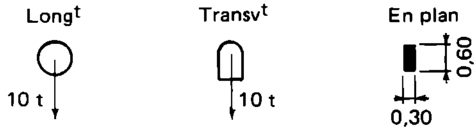




Système B_t (tandem)



Système B_r (roue)



Le système de charges B comprend trois systèmes distincts dont il y a lieu d'examiner indépendamment les effets pour chaque élément des ponts :

Le système B_c se compose de camions types ;

Le système B_r se compose d'une roue isolée ;

Le système B_t se compose de groupes de deux essieux dénommés essieux-tandems.

Les deux premiers systèmes B_c et B_r s'appliquent à tous les ponts quelle que soit leur classe ; le système B_t ne s'applique qu'aux ponts de première ou de deuxième classe.

- *Coefficient dynamique* : les charges roulantes engendrent, de par leur vitesse d'intervention, un effet dynamique qui est d'autant plus important que la portée l est faible et que le rapport de la charge permanente totale G à la charge roulante totale Q est plus faible. On en tient compte en appliquant aux charges roulantes

Q du système B un coefficient de majoration dynamique :

$$\delta = 1 + \frac{0,4}{1 + 0,2\,l} + \frac{0,6}{1 + 4\frac{G}{Q}}$$

- *Convois spéciaux* : sur certains itinéraires, on peut être amené à envisager le passage de convois spéciaux (par exemple : itinéraires militaires, chars de 70 ou de 110 t etc...).

b) Charges climatiques

Ces charges sont fixées par les Règles Neige-Vent 65 (Règles N V révisées 1967). Voir également Annexe D du B.A.E.L. *Neige* (S_n) les charges normales p_{n0} peuvent aller selon les régions de 3,5 à 5,5 kN/m^2 ; par ailleurs, au-delà de 200 m d'altitude, la charge normale est majorée par des formules spéciales ; par exemple, à 2000 m d'altitude la majoration atteint 4,8 kN/m^2.

Vent (W) la pression dynamique de base q_{10} (à 10 m de hauteur) varie selon les régions et le site plus ou moins protégé de 0,5 à 0,9 kN/m^2.

A une hauteur H > 10, la pression dynamique est plus élevée :

$$\frac{q_H}{q_{10}} = 2,5\,\frac{H + 18}{H + 60} \quad (\text{pour } H \leqslant 500 \text{ m}).$$

Pour H = 500 m, on a donc $q_{500} = 2,3\,q_{10}$.

Pour les cas extrêmes (ouragan éventuel) on applique un coefficient 1,75.

Pour les actions de Neige et de Vent, la forme, l'exposition, l'inclinaison, les ouvertures, etc... interviennent selon des modalités d'application détaillées dans les règles N V 65 - 67.

Pour les ponts, la circulaire du 29.12.71, admet une action horizontale normale à l'axe de la chaussée de 2 kN/m^2 sur la surface offerte.

A.4.4. Actions accidentelles

Il s'agit d'actions dues à des phénomènes rares et exceptionnels : séïsmes, explosions, chocs, incendies, etc... Ces actions ne sont à prendre en compte que si le C.C.T.P. le demande et précise les actions imposées et leurs conditions d'application.

Nota - Ce chapitre de notre livre reste parfaitement valable dans la mesure où nous n'y avons indiqué que les données de base essentielles et renvoyé le lecteur aux normes, fascicules, règlements en vigueur (ou C.C.T.P.) pour les détails d'application. Il convient donc toujours, pour ces détails de se reporter à la nouvelle rédaction du Chap. A3 - *Actions et Sollicitations* des Règles BAEL 83 et à *son annexe D* dont les modifications ont eu pour but une harmonisation avec les Règles BPEL 83.

A titre transitoire les Règles BAEL 83 prévoient dans leur annexe D que les charges routières actuellement prévues par la circulaire du 29 décembre 1971 seront majorées par *les coefficients 1,07 à l'E.L.U et 1,20 à l'E.L.S.* en attendant la parution d'une nouvelle circulaire.

CHAPITRE A.5

LES SOLLICITATIONS

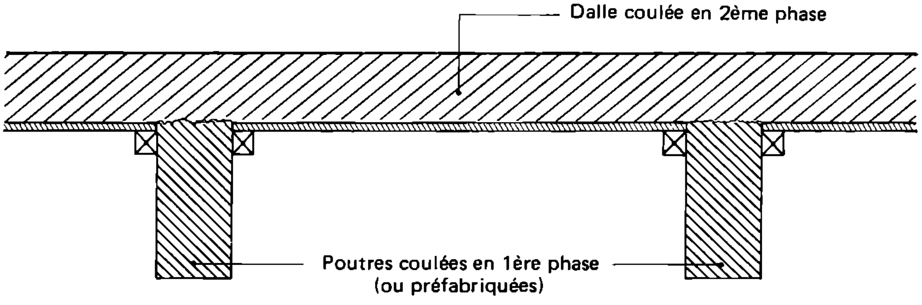
A.5.1. Définition

Les sollicitations notées «S» sont les efforts (normaux ou tranchants) et les moments (de flexion ou de torsion) calculés à partir des actions par les méthodes de la R.D.M. ; lorsque celles-ci ne sont pas applicables, on peut, soit appliquer, avec bon sens, des schémas se rapprochant de structures connues et calculables, soit procéder à une expérimentation sur modèle réduit ou en photoélasticité (cas de formes particulièrement complexes).

A.5.2. Cas des ouvrages construits en plusieurs phases

Il doit être tenu compte, dans l'évaluation des sollicitations, de l'addition des phases successives.

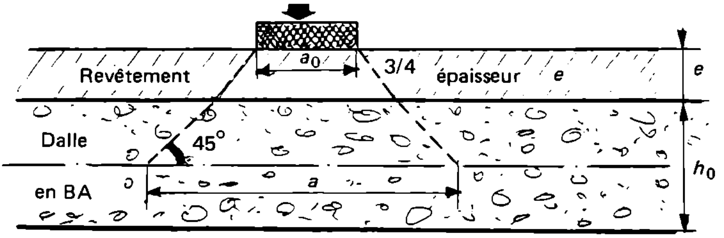
C'est par exemple le cas suivant :



En ce qui concerne la charge permanente, les poutres coulées en première phase sont sollicitées par le poids total du béton tandis que la dalle ne supporte que son propre poids. Les charges d'exploitation sollicitent, par contre, l'ensemble dalle-poutres.

A.5.3. Cas des dalles

On admet qu'une force appliquée à la surface d'une dalle sur une aire à contour convexe agit uniformément sur une aire du feuillet moyen en admettant la répartition de la charge à 45° à travers le béton et selon les 3/4 de l'épaisseur des revêtements autres qu'en béton (asphalte, par exemple). (*A.3.2,5)



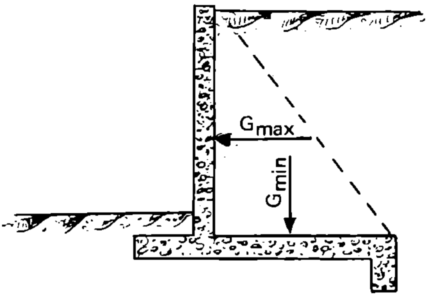
$$a = a_0 + 2\left(\frac{3}{4}e + \frac{h_0}{2}\right) \text{ d'où } a = a_0 + \frac{3}{2}e + h_0$$

A.5.4. Sollicitations de calcul : (*A.3.3)

a) **Notations :**

On note : G_{max} l'ensemble des actions permanentes défavorables (celles qui majorent les sollicitations).

et G_{min} l'ensemble des actions permanentes favorables (celles qui minorent les sollicitations).



Dans une combinaison donnée G_{max} et G_{min} désignent des actions d'origine ou de natures *différentes*. Par exemple, le poids propre de la terre derrière un mur de soutènement agit verticalement (suivant G_{min}) sur la semelle car c'est favorable à la stabilité et horizontalement sur le mur (suivant G_{max}) car la poussée est défavorable à la stabilité ; la poussée et la charge verticale sont, en effet, de natures différentes. Par contre, le poids propre d'une poutre continue est introduit avec le

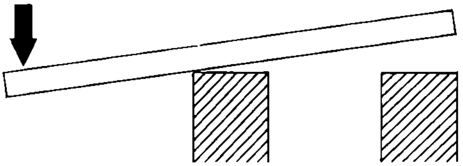
même coefficient sur toute sa longueur car son action est de même origine et de même nature sur les différentes travées.

On note : Q_1 une action variable dite «de base»

et $Q_2, Q_3, \ldots Q_i$ les autres actions dites «d'accompagnement».

b) Équilibre statique

On doit évidemment vérifier l'équilibre statique de l'ouvrage, par exemple :



c) États limites ultimes

Les sollicitations de calcul à l'état limite ultime résultent de combinaison d'actions dont on retient la plus défavorable. *La combinaison fondamentale est :* (*A.3.3,21).

$$\underbrace{S(\gamma_G G_{max} + G_{min})}_{\text{actions permanentes}} + \underbrace{\overbrace{S(\gamma_{Q_1} Q_1)}^{\text{de base}} + \overbrace{S(\Sigma\ \gamma_{Qi} Q_i)}^{\text{d'accompagnement}}}_{\text{actions variables}}$$

$\gamma_G = 1{,}35$

$\gamma_{Q_1} = 1{,}35$ pour les charges étroitement bornées (convois militaires ou exceptionnels)

$\gamma_{Q_1} = 1{,}50$ dans tous les autres cas (bâtiments, etc...).

Pour les charges d'accompagnement Q_2, le coefficient γ_{Q_2} a pour valeur 1,2.
Pour les charges routières majoration supplémentaire de 1,07 (voir Nota p. 31).

d) États limites de service (*A3.3,4)

La combinaison fondamentale est :

$$S(G_{max} + G_{min}) + S(Q_1) + S(\Sigma\ \psi_{oi} Q_i)$$

pour Q_1 = charges routières, on appliquera $\gamma_{Q_1} = 1{,}20$

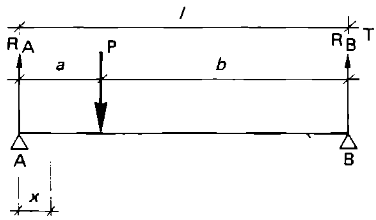
pour Q_2 action Neige-Vent $\psi_{o2} = 0{,}9$. (voir Règles Neige-Vent 1965 - 67).

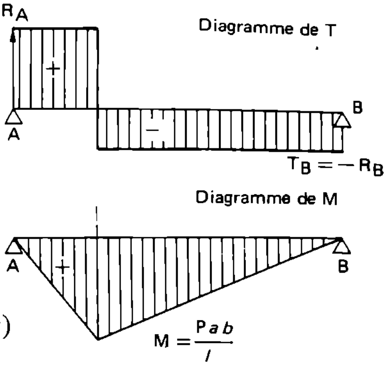
A.5.5. Diagrammes usuels des moments fléchissants et efforts tranchants

Nous donnons ci-après, à titre de rappel R.D.M., les diagrammes suivant lesquels varient, le long d'une poutre, les moments fléchissants et les efforts tranchants dans différents cas de charges usuels.

Dans le cas où certains des cas de charges suivants se cumulent, les sollicitations en résultant se cumulent également.

①



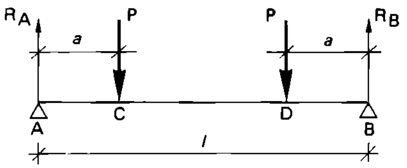


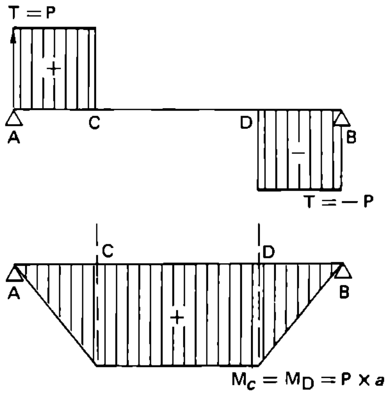
à gauche de P : $M_x = R_A\, x = \dfrac{P\,b\,x}{l}$

à droite de P : $M_x = R_A\, x = \dfrac{P\,b\,x}{l} - P(x - a)$

Moment maximum $M_0 = \dfrac{P\,a\,b}{l}$

②



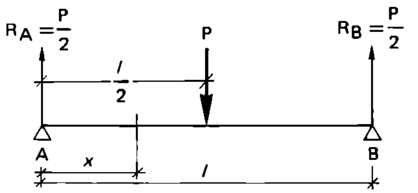


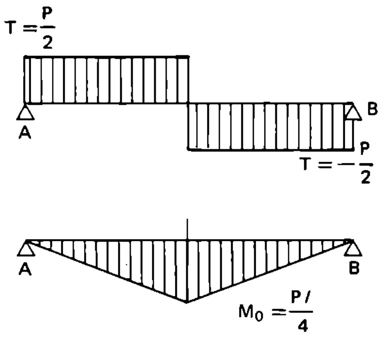
T = 0 entre C à D

$M_0 = P \times a$ est constant de C à D.

La portion de poutre CD est soumise au seul moment M, constant. Cette particularité est utilisée dans les essais de laboratoire pour étudier le comportement des poutres soumises à la flexion pure, sans effort tranchant.

③



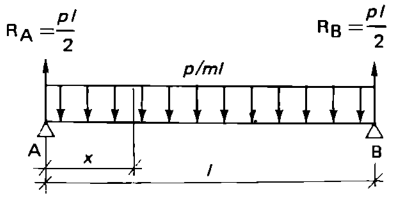


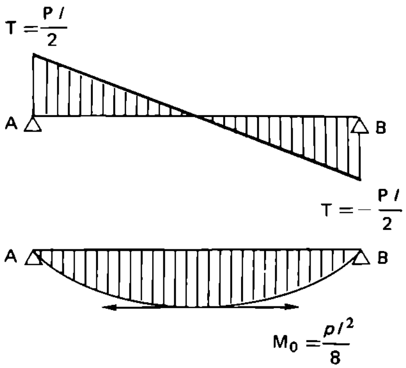
à gauche de P : $M_x = \dfrac{P\,x}{2}$

à droite de P : $M_x = \dfrac{P}{2}\,(l - x)$

Maximum pour $x = \dfrac{l}{2}$

④





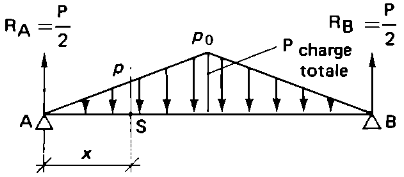
$$M_x = \frac{pl}{2}x - px \times \frac{x}{2} = \frac{p}{2}x\,(l - x)$$

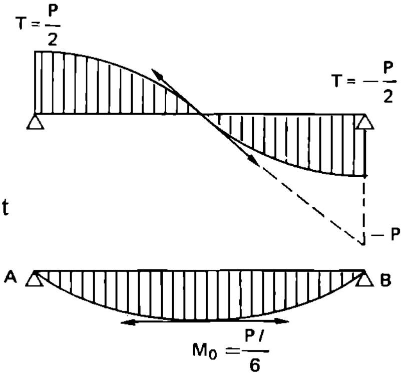
$$T_x = \frac{pl}{2} - px$$

le diagramme des moments est une fonction parabolique de x :

$$\text{maximum : } M_0 = \frac{pl^2}{8}$$

⑤





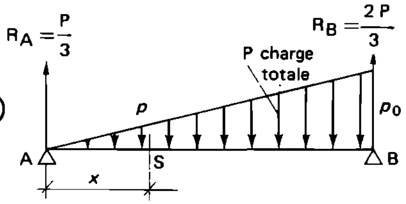
entre A et la section S, la charge appliquée est

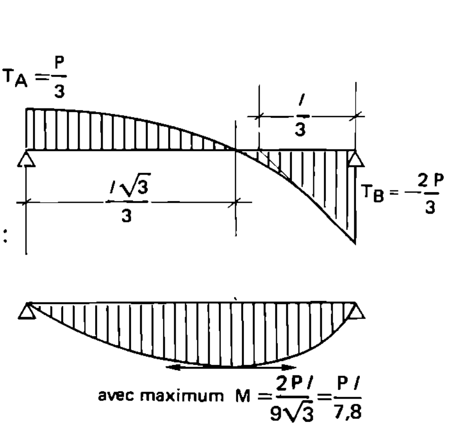
égale à $P' = \frac{px}{2}$ or $\frac{p}{x} = \frac{p_0}{\frac{l}{2}}$ d'où $P' = \frac{2\,Px^2}{l^2}$

on tire $M_x = \frac{Px}{6\,l^2}(3\,l^2 \quad 4\,x^2)$

$$T_x = \frac{P}{2\,l^2}(l^2 - 4\,x^2)$$

⑥





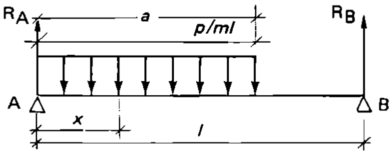
entre A et S, la charge appliquée est égale à :

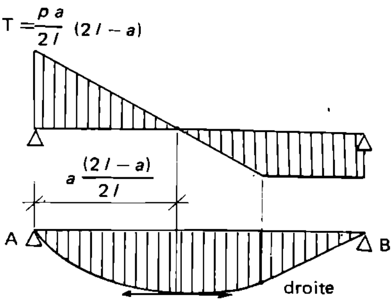
$P' = p\frac{x}{2}$ or $\frac{p}{x} = \frac{p_0}{l}$ d'où $P' = \frac{Px^2}{l^2}$,

on tire : $M_x = \frac{Px}{3\,l^2}(l^2 - x^2)$

$$T_x = \frac{P}{3\,l^2}(l^2 - 3\,x^2)$$

⑦



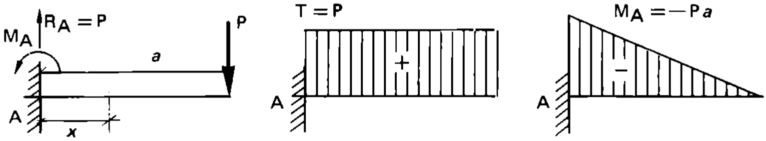


$$R_A = \frac{pa\left(l-\frac{a}{2}\right)}{l} = \frac{pa}{2l}(2l-a) \qquad R_B = \frac{pa^2}{2l}$$

$$M_x = \frac{pax}{2l}(2l-a) - \frac{px^2}{2} \qquad M_{max} = \frac{p}{8}\left[a\frac{(2l-a)}{l}\right]^2$$

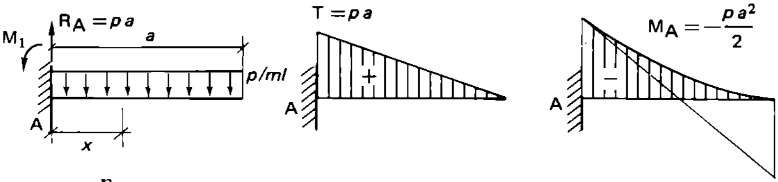
$$T_x = \frac{pa}{2l}(2l-a) - px$$

⑧



$$M_x = M_A + R_A\,x = -P \times a + Px = P(x-a)$$

⑨



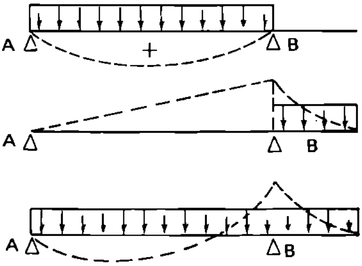
$$M_x = -\frac{p}{2}(x-a)^2 \qquad T_x = p(a-x)$$

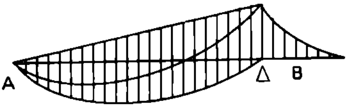
A.5.6. Combinaison défavorable des charges - diagramme enveloppe

Considérons une poutre sur deux appuis libres A et B, et prolongée en console au delà de l'appui B. Cette poutre peut recevoir par exemple une charge répartie *p/ml* sur toute sa longueur ou seulement entre A et B, ou seulement sur la partie en console.

Pour rechercher les sections soumises aux valeurs de M et T les plus défavorables, il faut superposer les résultats obtenus pour chaque combinaison et construire les diagrammes enveloppe.

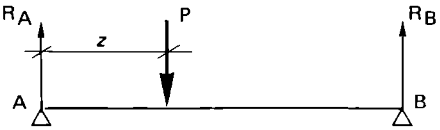
⑩

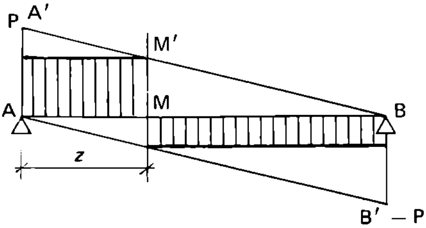




entre A et B, la poutre peut être soumise soit à des moments positifs soit à des moments négatifs dans une même section.

A.5.7. Poutre soumise à l'action d'une charge mobile concentrée P





Réactions en A et B pour une position z de la charge mobile P

$$R_A = \frac{P(l - z)}{l} \quad \text{et} \quad R_B = \frac{Pz}{l}$$

Diagramme enveloppe

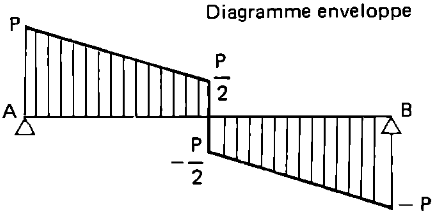


Diagramme de l'effort tranchant:

L'effort tranchant maximum en A est obtenu pour $z = 0$ et en B pour $z = l$ $T_A = P$ $T_B = -P$.

Considérons les deux lignes droites parallèles AB′ et A′B menées des points A′ et B′ tels que AA′ = P BB′ = − P.

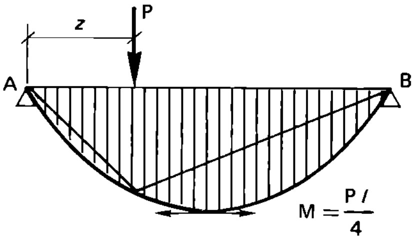
Dans une abscisse z correspondant à une position donnée de la charge mobile P, l'ordonnée MM′ a pour valeur

$$\frac{MM'}{P} = \frac{l - z}{l} \quad \text{ou} \quad MM' = \frac{P(l - z)}{l}$$

qui est égale à la valeur de l'effort tranchant correspondant.

AB′et A′B appelées lignes d'influence de l'effort tranchant permettent de lire directement sur la figure la valeur de l'effort tranchant maximum et de construire le diagramme enveloppe.

Diagramme du moment fléchissant:



Le moment de flexion M_x pour une position z de la charge mobile P, est égale à :

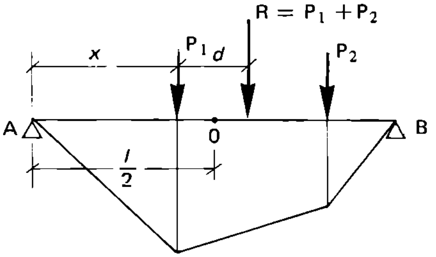
$$M_x = R_A\, x = \frac{P(l-z)}{l}\, x$$

Considérons la courbe parabolique $y = \frac{P(l-z)z}{l}$.

En un point d'abscisse z correspondant à une position donnée de la charge mobile P, l'ordonnée MM′ a pour valeur $MM' = \frac{P(l-z)z}{l}$ qui est la valeur du moment maximum dans cette section.

La courbe parabolique, de maximum maximorum $M = \frac{Pl}{4}$ est la courbe enveloppe des moments maximaux.

A.5.8. Poutre soumise à l'action d'un convoi. Théorème de Barré



Considérons deux charges mobiles P_1 et P_2 reliées entre elles et considérons la résultante $R = P_1 + P_2$ de ces deux charges, située à la distance d fixe par rapport à P_1.

La réaction R_A s'écrit $R_A = \frac{R\,[l-(x+d)]}{l}$.

Pour chaque position x, le moment maximum est situé à l'aplomb d'une des deux charges P_1 ou P_2.

A l'aplomb de P_1 d'abscisse x $M_x = R_A \times x = \frac{R\,x\,(l-x-d)}{l}$.

M_x est une fonction de x et le maximum est obtenu pour $\frac{dM}{dx} = 0$ soit $\frac{dM}{dx} = \frac{R}{l}(l-d-2x) = 0$ d'où $x = \frac{l-d}{2} = \frac{l}{2} - \frac{d}{2}$ que l'on peut écrire $x + \frac{d}{2} = \frac{l}{2}$.

La position correspondante du convoi est telle que le point situé à mi-distance de la charge P_1 et de la résultante R est confondu avec le milieu de la travée de la poutre.

Le moment maximum a lieu au droit de la charge P_1 et a pour valeur

$$M = \frac{R\,(l-d)^2}{4\,l}$$

Dans le cas de deux charges, le moment maximum absolu a lieu à l'aplomb de la charge la plus élevée qui correspond au minimum de d.

Le théorème se généralise au cas d'un convoi composé de plusieurs charges : «le moment maximum a lieu sauf exception à l'aplomb de la charge la plus voisine de la résultante générale».

Il est nécessaire de faire une vérification du moment à l'aplomb des charges importantes voisines de la résultante générale.

CHAPITRE A.6

(*A.7.1)

DISPOSITIONS CONCERNANT LES ARMATURES

A.6.1. Enrobage

Les armatures peuvent être isolées ou groupées en paquets. La figure ci-après résume les principales dispositions concernant l'enrobage et les distances entre armatures voisines dans le cas le plus général de paquets de largeur a et de hauteur $b \leqslant 2\,a$. Pour des armatures isolées, on a : $a = b = \phi$.

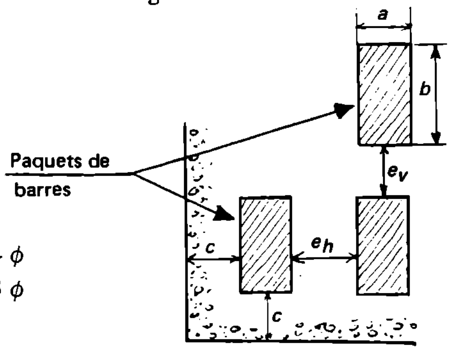
Ces dispositions assurent la possibilité d'un bétonnage correct.

$c \geqslant a$

$e_h \geqslant \begin{cases} a \\ 1{,}5\ c_g \end{cases}$ $\qquad e_v \geqslant \begin{cases} a \\ c_g \end{cases}$

fissure non ou préjudiciable $e_h \leqslant 4\,\phi$

" très " $e_h \leqslant 3\,\phi$



c_g désigne la dimension maximale (tamis) des granulats utilisés ; il est souhaitable que c_g ne dépasse pas le cinquième de l'épaisseur minimale de la pièce à bétonner. Les paquets de plus de trois barres ne peuvent être utilisés que s'ils ne sont soumis à aucune sollicitation d'entraînement. La couverture d'enrobage c doit être au moins :

4 cm pour les ouvrages à la mer et en milieu très agressif

3 cm sur les parements en milieu agressif

2 cm sur les parements exposés aux intempéries

1 cm sur les parements non exposés (en milieu couvert et clos).

Ces valeurs doivent être *strictement* respectées à l'exécution. Il faut également $r_g \leqslant \frac{c_g}{1,4}$ (granulats roulés).

et $r_m \leqslant c_g$ ou $\leqslant \frac{c_g}{1,2}$ (granulats concassés)

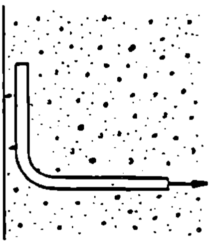
r_g = rayon moyen des plus petites mailles des *grilles* de ferraillage de dimensions intérieures a, b. $r_g = \frac{ab}{2(a+b)}$.

r_m = rayon moyen du *moule* à bétonner ; il est égal au quotient du volume (sur 1 m par exemple) par la surface de ses parois et des armatures incluses.

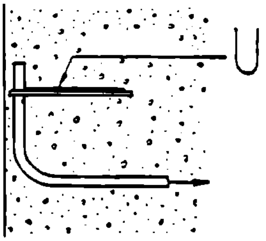
A.6.2. Poussée au vide (*A.7.4)

La mise en jeu mécanique d'un ancrage par courbure tend à faire fléchir la barre ancrée là ou sa courbure change ; il peut en résulter des poussées au vide susceptibles parfois de faire éclater le béton de couverture.

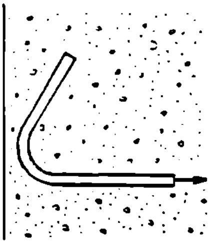
L'ancrage le plus dangereux à cet égard est celui qui comporte un retour rectiligne parallèle à une paroi et à son voisinage immédiat. Il convient soit de disposer une ligature reliant ce retour à la masse du béton, soit (solution la meilleure) d'incliner les retours rectilignes des ancrages vers la masse du béton.



incorrect



correct



correct

A.6.3. Armature de peau :

Pour les âmes des poutres de grande hauteur et les parois, dans le cas où la fissuration est jugée préjudiciable (intempéries) ou très préjudiciable (atmosphère corrosive) il est prévu de disposer des «armatures de peau» afin d'éviter les fissurations que peuvent engendrer certains phénomènes secondaires comme le retrait, le fluage ou les variations de température. Le réglement prévoit les dispositions suivantes :

a) Cas où la fissuration est préjudiciable : (*A.4.5,33)

Les «armatures de peau» sont réparties et disposées parallèlement à la fibre moyenne des poutres de grande hauteur à raison de 3 cm^2 au moins par mètre de

longueur de parement mesuré perpendiculairement à leur direction (par exemple, ϕ 8 mm, 6 p.m. $\simeq$ 3,2 cm^2).

b) Cas où la fissuration est très préjudiciable (*A.4.5,34)

La section des armatures de peau est portée de 3 à 5 cm^2 par mètre de parement (par exemple, ϕ 10 espacés de .... 15 cm = 5,2 cm^2).

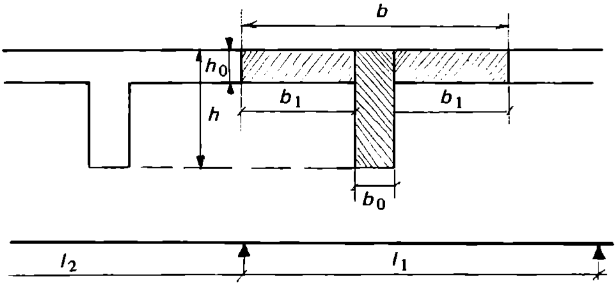
A.6.4. Diamètre maximal (*A.7.2,2)

Le diamètre des armatures d'âme ne doit pas dépasser $\frac{h}{35}$ ni $\frac{b_0}{10}$ (h = hauteur et b_0 = largeur de l'âme de la poutre).

CHAPITRE A.7

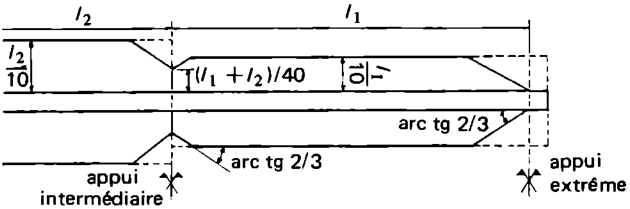
SECTION EN TÉ (*A.4.1,3)

En ce qui concerne la largeur b_1 supplémentaire à prendre en compte dans le cas de dalle associée à plusieurs poutres, on applique les règles ci-dessous :



- on ne doit pas attribuer la même zône de hourdis à deux nervures différentes
- la largeur notée b_1 ne doit pas dépasser le dixième de la portée d'une travée
- la largeur notée b_1 ne doit pas dépasser les deux tiers de la distance de la section considérée à l'axe de l'appui extrême le plus rapproché
- la largeur notée b_1 est enfin limitée au quarantième de la somme des portées encadrant l'appui intermédiaire le plus rapproché, augmenté des deux tiers de la distance de la section considérée à cet appui.

Ces diverses limitations sont résumées sur le schéma ci-dessous.



CHAPITRE A.8

(*A.4.2)

CONDITION DE NON FRAGILITÉ

Pour qu'une section tendue ou fléchie soit considérée comme «non fragile» il faut que la force de traction provoquant la fissuration du béton entraîne dans les armatures tendues de section A_s une contrainte au plus égale à leur limite élastique garantie f_e.

Pour évaluer la sollicitation de fissuration, les calculs sont conduits dans l'hypothèse d'un diagramme des contraintes linéaires sur toute la hauteur de la section supposée non armée et non fissurée, en prenant sur la fibre la plus tendue une contrainte de traction du béton égale à f_{tj}.

Pour un tirant de section $B = b \times h$, la sollicitation de fissuration du béton est $f_{tj} \times B$; si A_s est la section d'armatures tendues, on doit donc avoir :

$$A_s \times f_e \geqslant f_{tj} \times B.$$

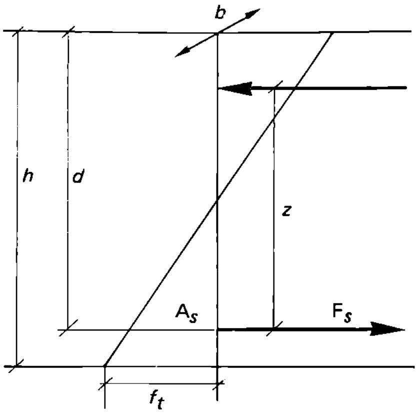
Si on appelle ρ le rapport $\frac{A_s}{B}$ (pourcentage d'armatures) on doit avoir $\rho \geqslant \frac{f_{tj}}{f_e}$ pour que la condition de non-fragilité soit respectée ; avec des valeurs usuelles par exemple : $f_{tj} = 2$ MPa et $f_e = 400$ MPa, le pourcentage minimal d'armatures serait 0,5 %.

Dans le cas de la flexion simple, on peut prendre comme bras de levier $z = 0{,}9\,d$ (d étant la hauteur utile de la poutre) ; si on admet en outre que pour des poutres usuelles d est sensiblement égal à $0{,}9\,h$, on obtient, *pour une section rectangulaire* de largeur b armée en traction d'une section d'armatures A_s, la condition :

$\rho \geqslant 0{,}23 \frac{f_{tj}}{f_e}$ formule qui se justifie ainsi en posant $\rho = \frac{A_s}{b\,d}$:

si on appelle M_f le moment de sollicitation à la fissuration, on a

$$f_t = \frac{M_f \times \frac{h}{2}}{\frac{b h^3}{12}} \qquad \text{D'où :} \quad M_f = f_t\,\frac{b h^2}{6}$$



Si l'on admet $z = 0,9\,d = 0,9 \times 0,9\,h = 0,81\,h$ il faut :

$$A_s \times f_e \times 0,81\,h \geqslant f_t \frac{bh^2}{6}$$

$$\frac{A_s}{bh} \geqslant 0,21 \frac{f_t}{f_e} \quad \text{ou} \quad \frac{A_s}{bd} \geqslant 0,23 \frac{f_t}{f_e}.$$

Cette condition est, en général, satisfaite d'après les calculs aux état limites en flexion.

MODULE B - ETATS-LIMITES EN FLEXION SIMPLE

CHAPITRE B.1

DÉFINITIONS ET PRINCIPES

B.1.1. Définition des «États-limites»

Par définition, un «état-limite» est un état particulier au-delà duquel une structure, ou une partie de cette structure cesse de remplir les fonctions ou ne satisfait plus aux conditions pour lesquelles elle a été conçue. Lorsqu'un état-limite est atteint, une condition requise de la structure ou d'un de ses éléments pour remplir son objet est strictement satisfaite mais cesserait de l'être en cas de modification défavorable d'une action.

On distingue :

- *les états-limites ultimes* qui correspondent à la valeur maximale de la capacité portante :
  - équilibre statique,
  - résistance de la structure ou de l'un de ses éléments,
  - stabilité de forme....
- *les états-limites* de service qui constituent les frontières au-delà desquelles les conditions normales d'exploitation et de durabilité de la construction ou de l'un de ses éléments ne sont plus satisfaites :
  - ouvertures excessives des fissures,
  - déformations excessives des éléments porteurs,
  - vibrations inconfortables pour les usagers, etc...

La méthode de calcul aux états-limites tient compte de la variabilité aléatoire des propriétés mécaniques des matériaux et des actions. L'objet du calcul est de maintenir la probabilité de n'atteindre tel ou tel état-limite qu'au-delà d'une valeur préétablie pour le type de structure considéré.

B.1.2. Facteurs d'insécurité - Prises en compte

Les coefficients de prise en compte sont fonction de la fiabilité des différents facteurs d'insécurité.

a) Incertitude sur la résistance des matériaux utilisés : (voir contraintes limites A.3.1.c et A.3.2.f).

b) Incertitude sur les valeurs des actions (voir coefficient γ_G et γ_Q A.5.4.b).

c) Incertitude sur les sollicitations calculées.

La sollicitation calculée «S» peut, dans certains cas, être multipliée par un coefficient $\gamma_S \geqslant 1$.

CHAPITRE B.2

ÉTAT LIMITE ULTIME

B.2.1. Hypothèses fondamentales

1) Conservation des sections planes (diagrammes de déformations linéaires) ; les déformations normales (allongement ou raccourcissement) sont donc proportionnelles en chaque point à la distance de ce point à l'axe neutre (c'est l'hypothèse de Bernouilli).

2) La résistance du béton à la traction est supposée nulle.

3) Chaque armature subit la même variation linéaire que la gaine de béton qui l'entoure (pas de glissement relatif).

4) Raccourcissement ultime du béton :

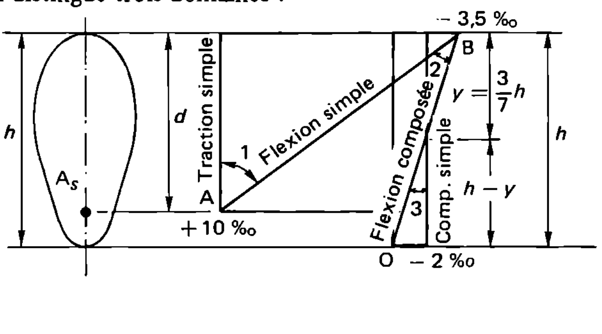
$$\epsilon_{bu} = 3{,}5\ 10^{-3} \text{ en flexion } (3{,}5\ ‰)$$
$$= 2{,}0\ 10^{-3} \text{ en compression centrée } (2\ ‰)$$

5) Allongement ultime des armatures limité à $10 \cdot 10^{-3}$ (10 ‰)

6) Les diagrammes linéaires de déformation passent obligatoirement par l'un des trois pivots A, B ou C.

B.2.2. Règle des trois pivots (*A.4.3,3)

Dans le caclul à l'état-limite ultime, les diverses positions que peut prendre le diagramme des déformations de la section sont définies par la figure ci-dessous dans laquelle on distingue trois domaines :



Dans le domaine 1 le diagramme passe par le point A qui correspond à un allongement de 10 ‰ de l'armature la plus tendue supposée concentrée en son centre de gravité.

Dans le domaine 2 le diagramme passe par le point B qui correspond à un raccourcissement de 3,5 ‰ de la fibre la plus comprimée.

Dans le domaine 3 le diagramme passe par le point C qui correspond à un raccourcissement de 2 ‰ du béton à une distance de la fibre la plus comprimée égale à 3/7 de la hauteur totale h de la section (Rapport de similitude des triangles). Cette règle des 3 pivots sera reprise et *complétée* au chapitre G.3.

B.2.3. Diagrammes contraintes-déformations

Pour le calcul à l'état limite ultime, on adoptera les diagrammes ci-après ; la déformation augmentant linéairement vers le haut à partir de l'axe neutre, la contrainte augmente également mais en suivant la courbe parabole-rectangle définie au paragraphe A.3.1.d.

a) Béton :

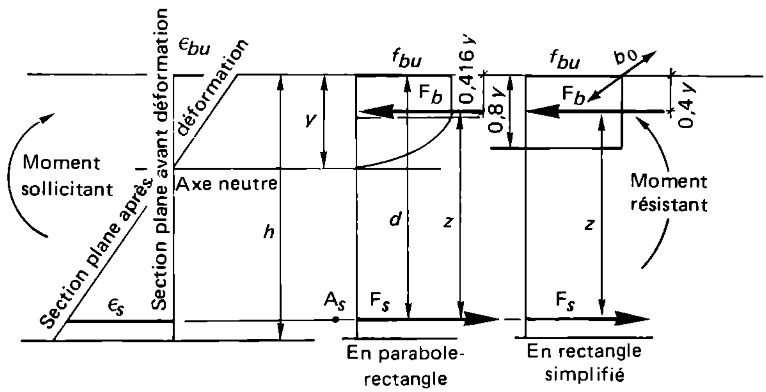
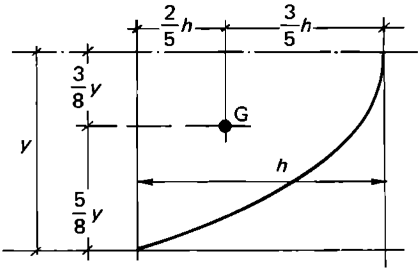


Diagramme des déformations — Diagramme des contraintes

- *Dans le cas du diagramme en parabole-rectangle*, le coefficient de remplissage est le rapport entre l'aire de la parabole-rectangle et celle du rectangle circonscrit. On a $\psi = 0{,}81$*.



**Rappel* : on a indiqué sur le croquis ci-contre les coordonnées du centre de gravité d'un 1/2 secteur parabolique dont l'aire est égale à $\frac{2}{3}h \times y$.

Si l'on suppose une section rectangulaire de largeur b_o la résultante des contraintes (force totale F_b de compression du béton) est donc : $F_b = 0{,}81\, f_{bu} \times b_o y$ et elle est appliquée à la distance $\delta_G = 0{,}416\, y$ (* rappel) de la fibre supérieure ; d'où $z = d - 0{,}416\, y$.

– *Dans le cas du diagramme-rectangulaire simplifié,* (*A4.3,42)

$F_b = 0{,}8\, f_{bu} \times b_o y$ et $z = d - 0{,}4\, y$.

Le moment résistant $M_R = F_b \times z$ est donc pratiquement le même si l'on adopte le diagramme simplifié rectangulaire.

b) **Aciers** :

Selon le type de l'acier (1, 2, 3 ou 4), on adoptera les diagrammes de calcul donnés en A.3.2.d ; on pourra par simple lecture évaluer la contrainte dans l'acier correspondant à l'allongement ϵ_s calculé sur le diagramme des déformations.

B.2.4. Principes de calcul

Il faut, tout d'abord, calculer y (position de la fibre neutre). On fera, à priori, les hypothèses suivantes dont on vérifiera, par la suite, le bien fondé :

1) Le béton a atteint son raccourcissement ultime (pivot B) $\epsilon_{bu} = 3{,}5$ ‰ et sa contrainte limite ultime f_{bu} $\left(\text{supposée connue et égale à } \dfrac{0{,}85\, f_{c28}}{1{,}5}\right)$.

2) Les aciers ont atteint leur limite élastique de calcul $\dfrac{f_e}{1{,}15}$ et un certain allongement ϵ_s.

Pour ces hypothèses, on suppose que l'on est au pivot B (domaine 2) et c'est le cas le plus fréquent.

Le diagramme rectangulaire simplifié permet d'écrire :

$$F_b = 0{,}8\, y\, b_o\, f_{bu}$$

et

$$F_s = A_s \frac{f_e}{1{,}15}$$

En flexion simple (pas d'effort normal extérieur), on a $F_b = F_s$ (en valeur absolue) d'où une équation dite «des forces» dont on tire y.

On calcule alors l'allongement ϵ_s des aciers sur le diagramme des déformations où les triangles semblables, avec $\epsilon_{bu} = 3{,}5$ ‰, permettent d'écrire une équation dite «des déformations» :

$$\epsilon_s = \epsilon_{bu} \frac{d - y}{y} \quad \text{(triangles semblables).}$$

1er cas : on trouve $\epsilon_s \leqslant 10$ ‰ : (on est bien au pivot B)

On reporte ϵ_s sur le diagramme contraintes-déformations de l'acier en question et on en déduit si, pour cet allongement ϵ_s, la contrainte dans l'acier est bien $\dfrac{f_e}{1{,}15}$ (supposée à priori) :

Si oui : il y a *compatibilité* contraintes-déformations ; les hypothèses faites sont donc cohérentes et on pourra continuer le calcul.

Si non : il n'y a *pas compatibilité* car on trouve pour ϵ_s calculé une contrainte σ_s différente de $\frac{f_e}{1,15}$; on procède alors par itération en recalculant une nouvelle valeur de y par l'équation des forces (avec la valeur σ_s trouvée) et un nouvel σ_s par l'équation des déformations et ainsi de suite ; mais, en général, cette itération est rapidement convergente.

2ème cas : on trouve $\epsilon_s > 10$ ‰ :

Cela signifie que l'acier atteint son allongement ultime 10 ‰ avant que le béton n'atteigne son raccourcissement ultime ϵ_{bu}. On est donc au pivot A (domaine 1) avec une section d'acier insuffisante.

On adopte alors $y = \frac{\epsilon_{bu}}{\epsilon_s}(d - y)$

avec $\epsilon_{bu} = 3,5$ ‰ et $\epsilon_s = 10$ ‰

d'où $y = \frac{0,35}{1,35} d = 0,26\, d$

et l'on augmente la section d'acier A_s en la recalculant par l'équation des forces :

$$A_s = \frac{0,8\, y\, b_o\, f_{bu}}{f_{su}}$$

$f_{su} = \frac{f_e}{1,15}$ s'il s'agit de ronds lisses ou d'acier H.A. type 1, 3 et 4.

$f_{su} = \frac{1,1\, f_e}{1,15}$ s'il s'agit *d'une façon certaine* d'acier H.A. type 2 (on adopte $f_{su} = \frac{f_e}{1,15}$ quand le type de l'acier n'est pas connu a priori) ; on peut simplifier les calculs en adoptant un diagramme plafonné à : $f_{su} = \frac{f_e}{1,15}$.

Connaissant y, on calcule $z = d - 0,4\, y$; on connait $F_b = F_s$ d'où le moment résistant ultime $M_{ru} = F_b \times z$.

La sollicitation d'action maximale possible est déterminée à partir de l'équation de combinaison (voir § A.5.4.c) :

$$M\,(\gamma_G\, G_{max} + G_{min}) + M\,(\gamma_{Q_1}\, Q_1) + M\,(\Sigma\, \gamma_{Qi}\, Qi) \leqslant M_{ru}.$$

B.2.5. Armatures comprimées

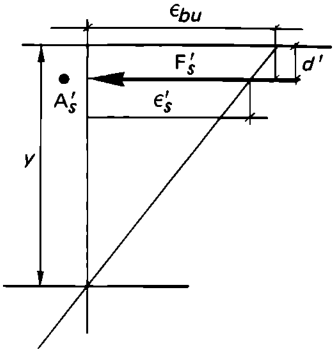
On peut être amené, si la contrainte de compression du béton est trop élevée, à prévoir des armatures travaillant en compression et soulageant d'autant le béton mais, en général, il est plus économique d'assurer la résistance en compression par le béton seul en augmentant *h* ou (et) *b* ou en prévoyant une poutre en T.

Si l'on prévoit une section d'armatures comprimées A'_s placées à la distance d' de la fibre supérieure, il faudra, dans l'équation des forces, tenir compte de la force de compression supplémentaire F'_s sur ces armatures (sous réserve que ces armature soient de diamètre ϕ entourées de cadres transversaux dont l'espacement $s \leqslant 15\ \phi$ à titre de sécurité au flambement des armatures comprimées).

La déformation en raccourcissement de ces armatures sera :

$$\epsilon'_s = \epsilon_{bu} \frac{y - d'}{y}$$

La contrainte de compression correspondante σ'_s sera lue sur le graphique contrainte-déformation correspondant au type d'acier utilisé et on aura $F'_s = A'_s\ \sigma'_s$.



On pourra admettre en première approximation, avant la connaissance de y, pour pouvoir écrire l'équation des forces :

$$\sigma'_s = \frac{f_e}{1{,}15}.$$

CHAPITRE B.3

ÉTAT LIMITE DE SERVICE

La vérification à l'état-limite de service suppose que les matériaux subissent des contraintes qui ne dépassent pas des contraintes limites prévues (A.3.1.c et A.3.2.f) et restent ainsi pratiquement dans le domaine «élastique».

B.3.1. Hypothèses fondamentales (*A.4.5,1)

On admet les hypothèses suivantes :

1) Conservation des sections planes

2) Les contraintes de compression du béton et de traction des aciers sont supposées proportionnelles à leur déformation élastique (loi de Hoock).

3) La résistance en traction du béton est supposée nulle.

4) Il n'y a aucun glissement de l'acier par rapport au béton.

5) Par convention, le rapport $n = \frac{E_s}{E_b}$ ou coefficient d'équivalence a pour valeur $n = 15$.

6) Il est fait abstraction du retrait et du fluage.

B.3.2. Calculs de vérification

Les calculs à l'état limite de service *ne sont à exécuter qu'en flexion et dans le cas où la fissuration est considérée comme préjudiciable ou très préjudiciable* (A.3.2.f) ; la limite imposée pour les contraintes de compression du béton (A.3.1.c) et de traction des aciers (A.3.2.f) est une condition qui permet d'éviter, d'une part, une fissuration du béton parallèle à la direction des contraintes de compression (compression limitée) et, d'autre part, de limiter l'ouverture des fissures (en limitant la traction des aciers) ; on évite ainsi la corrosion des armatures.

B.3.3. Diagrammes des contraintes

Les limites imposées pour les contraintes sont telles que les matériaux restent dans le domaine élastique.

Les diagrammes d'une section travaillant en flexion sont donc les suivants :

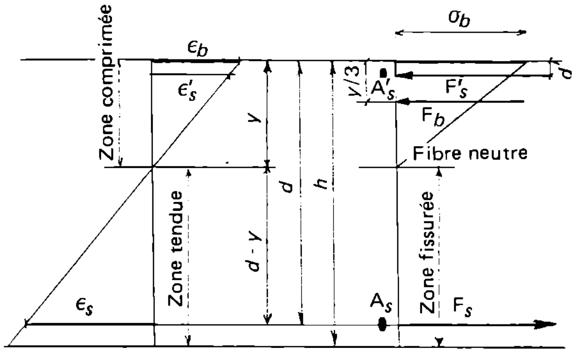


Diagramme des déformations Diagramme des contraintes

B.3.4. Principes des calculs

a) Calcul des contraintes

La loi de Hoock (élasticité) étant respectée, on peut appliquer les formules classiques de la R.D.M. pour calculer les contraintes normales sous l'effet du moment fléchissant maximal M (dans la section considérée) calculé d'après la combinaison indiquée en A.5.4. d. On aura :

- compression maximale du béton : $\sigma_b = \dfrac{My}{I}$

- traction maximale des armatures : $\sigma_s = n\dfrac{M(d-y)}{I}$

- compression maximale des aciers : $\sigma'_s = n\dfrac{M(y-d')}{I}$

n : est le coefficient d'équivalence acier-béton (voir ci-après). Il convient donc de pouvoir calculer y (position de la fibre neutre) et le moment d'inertie I de la section supposée fissurée (au-dessous de la fibre neutre).

b) Coefficient d'équivalence n

Si l'on suppose qu'il n'y a aucun glissement relatif de l'acier et du béton cela signifie que la déformation de l'acier $\Delta_s = \frac{\sigma_s}{E_s}$ est égale à la déformation du béton $\Delta_b = \frac{\sigma_b}{E_b}$.

On a donc : $\sigma_s = \sigma_b \frac{E_s}{E_b} = n\ \sigma_b$ en posant $n = \frac{E_s}{E_b}$.

Cela signifie qu'une section d'acier A_s est équivalente à une section fictive du béton n fois plus grande ; dans le calcul des sections dites «homogénéisées», on multipliera donc les sections d'acier par n.

On sait que $E_s \simeq 200\,000$ MPa.

En ce qui concerne la valeur de E_b, elle varie selon qu'il s'agit de charges instantanées ou de charges de longue durée. Si l'on suppose, par exemple, que la résistance caractéristique du béton $f_{cj} \simeq$ (16 MPa (tabl. A.3.1.a).

$Ei = 12\,000 \sqrt[3]{16} \simeq 30\,000$ MPa

$Ev = 1/3 \times 30\,000 = 10\,000$ MPa

d'où $n = \frac{200\,000}{30\,000} \simeq 7$ (charges instantanées)

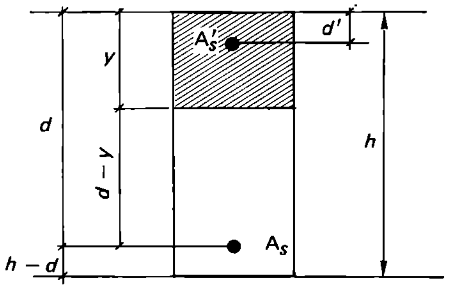
et $n = \frac{200\,000}{10\,000} = 20$ (charges de longue durée).

Dans le B.A.E.L., on a adopté conventionnellement la valeur unique $n = 15$.

REMARQUE : $n = 15$ correspond approximativement à un module de longue durée pour les charges permanentes et à un module semi-instantané pour les charges d'exploitation (en valeur unique).

c) Calcul de y

On sait que dans une section travaillant en flexion simple, l'axe neutre passe par le centre de gravité par rapport auquel le moment statique de la section est nulle ; on calcul la position de l'axe neutre de la section réduite homogénéisée, en tenant



compte du coefficient d'équivalence n à appliquer aux sections d'acier et de la fissuration (inexistance de la section de béton en dessous de la fibre neutre); l'équation de moment statique est alors :

$$b_o y \times \frac{y}{2} + n\,A'_s\,(y - d') - n\,A_s\,(d - y) = 0$$

soit :

$$\frac{b}{2}y^2 + n\,(A_s + A'_s)\,y - n\,(A_s d + A'_s\,d') = 0$$

c'est une équation de la forme $ay^2 + by + c = 0$ qui admet deux racines de signe contraire ; on prendra pour y la valeur positive : $y = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

d) Calcul du moment d'inertie

Connaissant y, on calcule le moment d'inertie de la section réduite homogénéisée :

$$I = \frac{b_o y^3}{3} + n\,A'_s\,(y - d')^2 + n\,A_s\,(d - y)^2$$

On peut alors calculer les contraintes maximales à l'état limite de service et l'on vérifie qu'elles sont inférieures (ou au plus égales) aux contraintes limites de service fixées en A.3.1.c pour le béton et A.3.2.f pour les aciers.

e) Cas d'une section en T

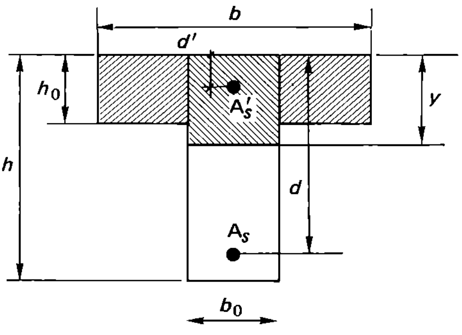
La section en T est le cas le plus fréquent ; en effet, les poutres sont le plus souvent associées à une dalle d'épaisseur h_0 dont une partie, de largeur b, se trouve solidaire de la poutre. Il suffira d'ajouter dans les équations de moment statique la part de hourdis associée :

$$+ h_0\,(b - b_0)\left(y - \frac{h_0}{2}\right).$$

Si $y \leqslant h_0$, on fera les calculs en prenant la valeur de b au lieu de b_0.

Si $y > h_0$, le calcul du moment d'inertie sera :

$$I = \frac{b}{3}y^3 - \left(\frac{b - b_0}{3}\right)(y - h_0)^3 + n\,A'_s\,(y - d')^2 + n\,A_s\,(d - y)^2.$$



Nota - Dans le cacul de I on néglige l'inertie des sections d'armatures par rapport à leur axe propre (théorème de Huygens).

CHAPITRE B.4

PRÉDIMENSIONNEMENT

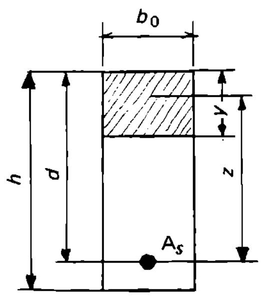
Avant tout calcul, il convient d'adopter, à priori, des dimensions définissant la section de béton afin d'évaluer le moment fléchissant de poids propre et le bras de levier du couple interne résistant. Nous donnons ci-après quelques règles pratiques permettant de déterminer approximativement ces dimensions.

B.4.1. Section de béton

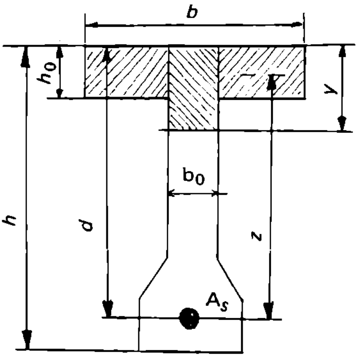
Pour les poutres courantes de section rectangulaire, on peut adopter, en général, une hauteur h comprise entre le 1/12 et le 1/16 de la portée, selon que les charges d'exploitation sont plus ou moins importantes.

Pour la largeur de la section, b_0, on peut adopter une valeur comprise entre 1/2 et 1/5 de la hauteur (sauf cas particulier).

Si la poutre est une poutre en Té (avec dalle associée) on pourra réduire un peu ces valeurs quitte à élargir le talon inférieur de la poutre pour y caser les armatures :



Poutre rectangulaire



Poutre en Té à talon

Nota : Poutres peu hautes $d \rightarrow 0{,}85$ à $0{,}8\, h$
Poutres très hautes $d \rightarrow 0{,}95\, h$

En première approximation, on peut évaluer ainsi le bras de levier z du couple interne résistant :

$$d \simeq 0{,}9\,h \qquad z \simeq 0{,}9\,d \simeq 0{,}8\,h$$

y étant la hauteur de la zone comprimée ; on peut admettre $y \cong 0{,}3\,d$ en section rectangulaire à $0{,}25\,d$ en section Té.

B.4.2. Section d'armatures tendues :

Ayant calculé le moment ultime sollicitant $M_{su} : (\gamma_G M_G + \gamma_Q M_Q + ...)$ il convient de réaliser un moment ultime résistant $M_{ru} > M_{su}$.

Si A_s est la section d'armatures tendues dont la limite élastique est f_e, le moment résistant ultime est :

$$M_{ru} = A_s \frac{f_e}{\gamma_s} z \qquad \left(\frac{f_e}{\gamma_s} = f_{su}\right)$$

il faut donc :
$$A_s \geqslant \frac{M_{su}}{z} \times \frac{1}{\frac{f_e}{\gamma_s}} = \frac{M_{su}}{0{,}8\,h\,f_{su}}\,.$$

B.4.3. Contrainte du béton

La force de traction sur les aciers $F_s = \frac{M_{su}}{z}$ se retrouve dans le couple résistant interne en force de compression du béton F'_b ; la contrainte correspondante de compression ultime est :

$$\sigma_{bu} = \frac{F_b}{0{,}8\,y \times b_0} \quad \text{(B.2.3. diagramme rectangulaire simplifié).}$$

Si cette contrainte est supérieure à la valeur limite : $f_{bu} = \frac{0{,}85\,f_{cj}}{\gamma_b}$ (avec $\gamma_b = 1{,}5$), on pourra d'abord augmenter la valeur f_{cj} en prévoyant l'utilisation d'un béton de plus haute résistance sinon il conviendra d'augmenter le bras de levier z de façon que l'on ait $\frac{F_b}{0{,}8\,y\,b_0} \leqslant f_{bu}$ d'où $y \geqslant \frac{F_b}{0{,}8\,f_{bu}\,b_0}$.

D'après les valeurs relatives indiquées précédemment, on adoptera pour hauteur une valeur $h \simeq \frac{d}{0{,}9}$ avec $d \geqslant \frac{y}{0{,}3}$ (en section rectangulaire) ou $\frac{y}{0{,}25}$ en section en Té.

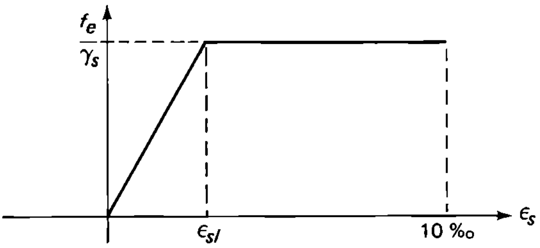
B.4.4. Armatures comprimées

Si l'augmentation de d (donc de h n'est pas possible), on ajoutera des aciers comprimés capables d'absorber en compression le complément de force F_a que le béton ne peut pas absorber :

$$F'_a = F_a - F_b \quad \text{avec} \quad F_b = 0{,}8\,y \times b_0 \times f_{bu}$$

Les calculs de vérification aux états-limites (chap. B5 - B6 - B7 et C6 - C7) pourront alors être entrepris et ils permettront de vérifier que le prédimensionnement peut être définitivement adopté (c'est en général le cas) ou que quelques corrections doivent y être apportées.

Nota - C'est en particulier quand on est au pivot B et que l'allongement des aciers tendus, ϵ_s, est inférieur à la valeur $\epsilon_{sl} = \frac{f_e}{E\,\gamma_s}$, que des aciers comprimés sont nécessaires pour augmenter la capacité de résistance en compression de la zone comprimée, (quand on ne peut pas en augmenter les dimensions), sinon, les aciers tendus se trouvent mal utilisés.



B.4.5. Tableaux et abaques

On trouve actuellement dans quelques ouvrages des tableaux et abaques facilitant le dimensionnement préalable des poutres à l'usage des bureaux d'études spécialisés.

Nous citerons entre autres :

- *Calcul du béton armé à l'état limite ultime* par JALIL - MORISSET et PERCHAT. (Éditions Eyrolles).

- *Guide pratique d'utilisation des Règles B.A.E.L. 80* par CAPRA et DAVIDOVICI. (Éditions Eyrolles).

Voir ci-après aux chapitres G.6.3. et I.2.2.

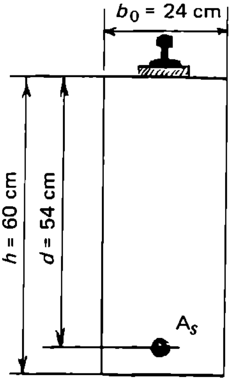
CHAPITRE B.5

CALCUL PRATIQUE A L'ÉTAT-LIMITE ULTIME SECTION RECTANGULAIRE

Pour la clarté de la conduite des calculs de l'E.L.U. sous sollicitation de flexion simple, nous commencerons par une section rectangulaire sans aciers comprimés. On suppose la fissuration préjudiciable.

B.5.1. Données du projet *

Soit une poutre de pont roulant de 8 m de portée (sur appuis simples) de section rectangulaire 60 x 24 cm ; la hauteur a été choisie entre le 1/12 et le 1/15 de la portée).



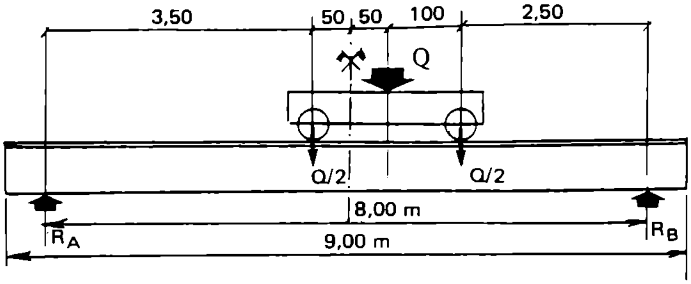
a) Charge permanente

$g = 0,24 \times 0,60 \times 1,00\,\text{m} \times 25 = 3,6$ kN/m.c^t
rail et fixation $\simeq$ . . . . 0,4 kN/m.c^t
$g =$ . . . . 4 kN/m.c^t
Poids total G = 4 x 9 = 36 kN
(9 m = longueur totale de la poutre).

b) Charge d'exploitation

Q = 50 kN sur deux essieux distants de 2,00 m. D'après le *théorème de Barré,* le moment fléchissant maximal se produit sous une des deux charges lorsque le milieu M de la poutre est équidistant de cette charge et de la résultante Q.

* pour la simplification des calculs, il ne sera pas tenu des efforts de freinage et des efforts transversaux supposés inclus dans le coefficient dynamique.



En écrivant que le moment est nul par rapport à B, on a :

$$R_A \times 8{,}00 = Q/2\,(4{,}50 + 2{,}50)$$

d'où

$$R_A = \frac{50 \times 7}{2 \times 8} = 21{,}9 \qquad (50\ \text{kN} = Q)$$

Moment maximal dans la section

$$M = 21{,}9 \times 3{,}50 = 76{,}6\ \text{kN.m}$$

Coefficient dynamique à appliquer :

$$\delta = 1 + \frac{0{,}4}{1 + 0{,}2 \times 8} + \frac{0{,}6}{1 + 4\,\dfrac{36}{50}} = 1{,}30$$

B.5.2. Prédimensionnement (à l'E.L.S.)

a) **Armatures** : le moment fléchissant à l'état limite de service est :

$M_G = \dfrac{4 \times 8^2}{8}$ . . . . 32 kN.m

$M_Q = 76{,}6 \times 1{,}30$ . . . . 100 kN.m

M_s (à l'E.L.S.) . . . . 132 kN.m

$$z \simeq 0{,}8\,h = 0{,}8 \times 60 = 0{,}48\ \text{m}$$

d'où

$$F_s = \frac{132}{0{,}48} = 275\ \text{kN}$$

Si on utilise des aciers H.A. Fe E 40 de type 2 (aciers Tor par exemple) et en supposant qu'ils ont atteint leur contrainte limite de service $2/3\,f_e = 2/3 \times 400 = 267$ ou $150 \times \eta = 150 \times 1{,}6 = 240$ soit $\sigma_s = 240$ MPa (fissuration préjudiciable), on devra avoir

$$A_s \geqslant \frac{275\ 10^{-3}}{240} = 11{,}5\ 10^{-4}\ \text{m}^2 \text{ soit } 11{,}5\ \text{cm}^2 \text{ soit}$$

$$A_s = 6\ \phi\ 16 = 1206\ \text{mm}^2\ (12{,}06\ \text{cm}^2).$$

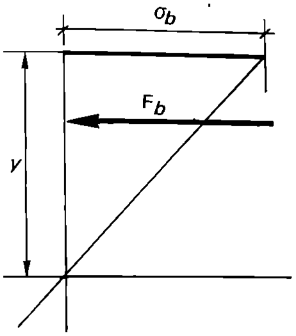
b) Contrainte approximative du béton :

Si l'on admet $y \simeq 0{,}3 \times d \simeq 16$ cm

On aura

$$\frac{\sigma_b}{2} \times y \times b_0 = F_b = F_s$$

(couple interne résistant)



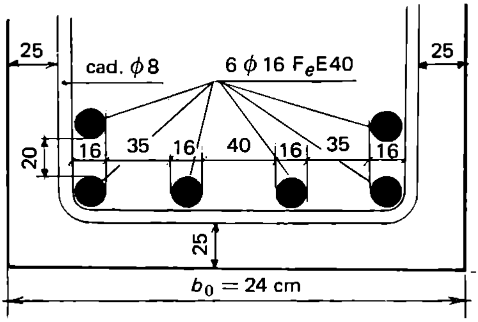
$$\sigma_b \left(\frac{MN}{m^2}\right) = \frac{2 \times 27\ 5\ kN\ 10^{-3}}{16 \times 24 \times 10^{-4}} = 12{,}7 \text{ MPa}$$

Il faut $\sigma_b \leqslant \overline{\sigma_b} = 0{,}60 f_{cj}$

d'où $f_{cj} \geqslant \dfrac{12{,}7}{0{,}6} = 21{,}2$ MPa

Supposons que l'on ait un béton dont $f_{cj} = 24$ MPa c'est une valeur que l'on peut couramment obtenir (voir tableau A.3.1.a).

c) Disposition des armatures



Nota - Dimension maximale possible des granulats $cg = 20$ mm (§ A.6.1).

B.5.3. Calcul à l'état limite ultime

a) Suppositions

Le béton a atteint $f_{bu} = 0{,}85 \dfrac{24}{1{,}5} = 13{,}6$ MPa

et $\epsilon_{bu} = 3{,}5$ ‰ — Pivot B

L'acier a atteint $f_{su} = \dfrac{f_e}{1{,}15} = \dfrac{400}{1{,}15} = 347{,}8$ MPa

b) Équation des forces : $F_b = F_s$ soit, en N et mm :

$$0{,}8 y \times 240 \times 13{,}6 = 1206 \times 347{,}8 = 419447 \text{ N} \quad y = \frac{419447}{0{,}8 \times 240 \times 13{,}6} = 161 \text{ mm}$$

c) Équation des déformations ; compatibilité ?

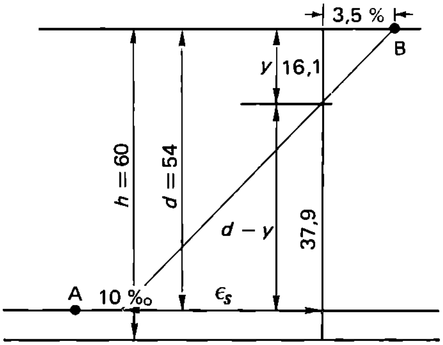
$$\frac{\epsilon_s}{37,9} = \frac{3,5}{16,1} \quad \text{d'où} \quad \epsilon_s = 8,24\,‰$$

Pour une contrainte :

$$\frac{f_e}{1,15} = \frac{400}{1,15} = 348 \text{ MPa}$$

l'allongement élastique ne serait que (au début du palier plastique) :

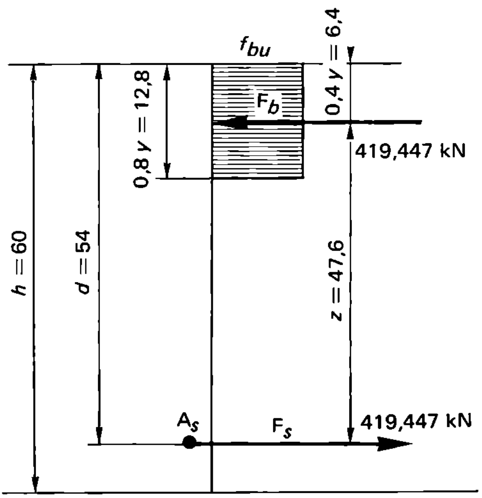
$$\epsilon_s = \frac{348}{200\,000} = 1,74\,‰$$



L'acier a donc bien atteint son palier de plasticité ; il y a donc compatibilité entre les équations de forces et de déformations ; les suppositions faites sont donc valables (pas d'itération nécessaire).

d) Moment résistant ultime : M_{ru}

$$M_{ru} = F_s \times z = 419,447 \times 0,476 = 199,6 \text{ kN.m.}$$



e) Moment sollicitant ultime

Le moment fléchissant sollicitant doit être calculé d'après la combinaison d'action : (voir A.5.4.c)

$$S\,(1{,}35\;G_{max}) + S\,(1{,}5\;Q)$$

en prenant $\gamma_G = 1{,}35$ et $\gamma_Q = 1{,}5$ (cas des bâtiments) et en supposant qu'aucune action d'accompagnement n'est à prendre en compte.

$$S\,(1{,}35\;G) = 1{,}35\frac{4 \times 8^2}{8} = 43{,}2\text{ kN.m}$$

$$S\,(1{,}5\;\;Q) = 1{,}5 \times 100 \;\;= 150{,}0\text{ kN.m} \qquad (M_Q = 100\text{ kN.m})$$

$$M_{(sol)} \;\ldots\ldots = 193{,}2\text{ kN.m}$$

On a bien $M_{(sol)} \leqslant M_{ru}$ (193,2 < 199,6).

La poutre satisfait donc à l'état limite ultime.

f) Charge maximale possible :

On l'obtient en écrivant $M_{(sol)} = M_{ru}$ en prenant Q comme inconnue soit :

$$43{,}2 + 1{,}5 \times \frac{Q}{2} \times \frac{7}{8} \times 3{,}5 = 199{,}6\text{ kN.m} \;\text{ d'où }\; Q = 68\text{ kN.}$$

Compte tenu du coefficient dynamique de 1,30, la charge maximale pourrait atteindre : $\frac{68}{1{,}30} = 52{,}3$ kN (au lieu des 50 prévus).

CHAPITRE B.6

CALCUL PRATIQUE A L'ÉTAT-LIMITE DE SERVICE SECTION RECTANGULAIRE

Le cacul est fait pour la même poutre que précédemment. En effet, la fissuration étant jugée préjudiciable (intempéries) les conditions du calcul à l'état limite de service doivent également être satisfaites.

B.6.1. Sollicitation de service

La combinaison est donnée en A.5.4.d (on supposera qu'aucune action d'accompagnement n'est prise en compte)

$$M_G = \frac{4 \times 8^2}{8} \qquad 32 \text{ kN.m}$$

$$M_Q = 76{,}6 \times 1{,}30 \qquad \underline{100 \text{ kN.m}}$$

$$M = \quad 132 \text{ kN.m}$$

soit $M = 132$ MN.m 10^{-3}.

B.6.2. Calcul de y et I

L'équation de moment statique : (en cm^3)

$$\frac{24}{2}y^2 - 15 \times 12{,}06\,(54 - y) = 0$$

donne $y = 22$ cm $= 0{,}22$ m

$$I = \frac{24}{3}(22)^3 + 15 \times 12{,}06\,(54 - 22)^2$$

$$= 270\cdot426 \text{ cm}^4 = 270\cdot426\ 10^{-8} \text{ m}^4$$

B.6.3. Contraintes de service

a) **Compression maximale du béton** sur la fibre supérieure

$$\sigma_b' = \frac{M}{I} y = \frac{132 \cdot 10^{-3} \times 0{,}22}{270 \cdot 426 \times 10^{-8}} = 10{,}7 \text{ MPa}$$

Cette contrainte est admissible car :

$$10{,}7 < 0{,}6 \, f_{cj} = 0{,}6 \times 24 = 14{,}4 \text{ MPa}$$

b) **Traction maximale des aciers** :

$$\frac{n \, M \, (d - y)}{I} = \frac{15 \times 132 \times 10^{-3} \times 0{,}32}{270 \cdot 426 \times 10^{-8}} = 232{,}5 \text{ MPa}$$

On utilise de l'acier Fe E 40 (f_e = 400 MPa) et on suppose que l'ouvrage est situé à l'extérieur aux intempéries (fissuration préjudiciable) la contrainte limite de service est donc la plus petite des deux valeurs :

$$2/3 \times 400 = 267 \text{ MPa} \quad \text{ou} \quad 150 \, \eta = 240 \text{ MPa.}$$

Acier H.A. : $\eta = 1{,}6$.

La contrainte dans les aciers 232,5 MPa est donc admissible (232,5 < 240).

CHAPITRE B.7

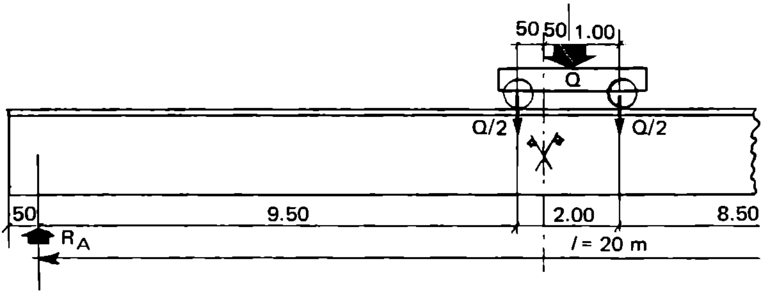
CALCUL PRATIQUE A L'ÉTAT-LIMITE ULTIME SECTION EN TÉ

Dans la pluplart des cas, les poutres supportent une dalle à laquelle elles sont associées ; la section résistante est alors une section en Té, la largeur de la table de compression associée à la poutre étant délimitée selon les prescriptions du chapitre A.7.

B.7.1. Données du projet

Poutre de pont roulant : 40 t au crochet ; ce poids pouvant pratiquement agir en totalité à l'une ou l'autre des extrémités du pont ; poids du pont 10 t ; entre axe des essieux 2,00 m ; portée de la poutre 20,00 m ; largeur de la poutre en tête 1,20 m avec un garde corps extérieur pour permettre une circulation de service ; largeur de l'âme de la poutre : 40 cm. La fissuration est préjudiciable.

D'après le théorème de Barré, la position du chariot donnant le moment fléchissant maximal est indiqué ci-dessous ; il se produit sous la charge Q/2 à gauche de l'axe et symétrique de la résultante Q par rapport au milieu de la poutre.



$$R_A \times 20 = Q/2\,(10{,}50 + 8{,}50)$$

d'où

$$R_A = \frac{45 \times 19}{40} = 21{,}3\ \text{T} \simeq 213\ \text{kN}$$

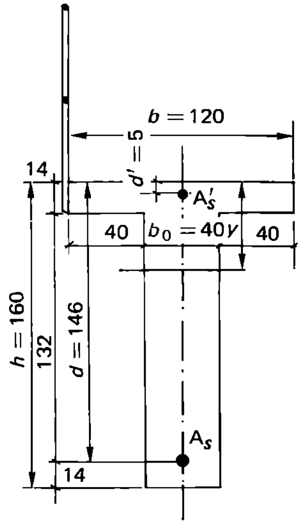
crochet	= 40 t
$+\frac{1}{2}$ pont	= 5 t
	45 t

Moment maximum de charge d'exploitation

$$M_Q = 213 \times 9{,}50 = 2023\ \text{kN.m}$$

B.7.2. Prédimensionnement

a) Hauteur de la poutre :



La charge portée étant importante nous adopterons une hauteur de l'ordre du 1/12 de la portée soit 1,67 m réduit à 1,60 m compte tenu de l'existence d'une table de compression.

Calcul de la charge permanente

(0,4 x 1,6 + 0,8 x 0,14) 25 = 18,8 kN/mct
Garde corps rail et fixation = 0,7 kN/mct
g = 19,5 kN/mct

Poids total : G = 21 x 19,5 = 410 kN
(21 m : longueur totale)

Charge roulante $Q = 40 + \frac{10}{2} = 45$ t

soit $Q \simeq 450$ kN

Coefficient dynamique :

$$1 + \frac{0,4}{1 + 0,2 \times 20} + \frac{0,6}{1 + 4\frac{410}{450}} = 1,21$$

Moment maximal de service :

$$S(G) = \frac{g\,l^2}{8} = \frac{19,5 \times 20^2}{8} = 975 \text{ kN.m}$$

S(Q) 2023 x 1,21 ≃ 2450 kN.m

Moment à l'E.L.S. 3425 kN.m

b) Armatures

Si l'on suppose $d = 1,46$ et $z = 0,9\,d$

on a $z = 1,31$ m.

Force de traction probable sur les aciers : $\frac{3425}{1,31} = 2614$ kN

On utilisera des aciers H.A. (Fe E 40) pouvant travailler en service à 150 x η avec $\eta = 1,6$ soit $\sigma_s = 150 \times 1,6 = 240$ MPa d'où la section d'acier

$$\frac{2614.000 \text{ N}}{240} = 10890 \text{ mm}^2$$

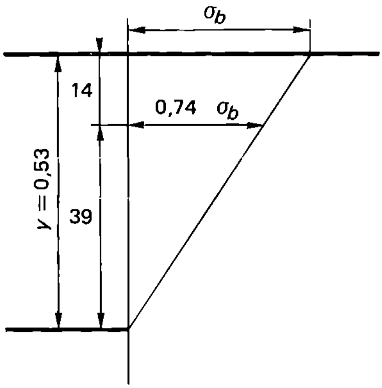
On adopte : 4 ϕ 40 = 5027
8 ϕ 32 = 6434 } A_s
11461 mm²

Le diamètre de 40 est admissible sous réserve de l'article A.6.1 (page 41).

On a donc : $A_s = 114,6 \times 10^{-4}$ m^2.

c) **Contrainte du béton**

La grosse section des armatures inférieures fait descendre la fibre neutre, admettons $y = \frac{h}{3} = \frac{1,60}{3} = 0,53$. La contrainte au niveau de la fibre inférieure du hourdis est :



$$\frac{\sigma_b \times 39}{53} = 0,74\ \sigma_b\ .\ \text{On a}\ .\ F_b = F_s$$

$$F_b = \underbrace{\left(\frac{\sigma_b + 0,74\ \sigma_b}{2}\right) 0,14 \times 0,80}_{\text{Ailes}}$$

$$+ \underbrace{\frac{\sigma_b}{2} \times 0,53 \times 0,40}_{\text{Ame}} = \boxed{2,614\ \text{MN}}$$

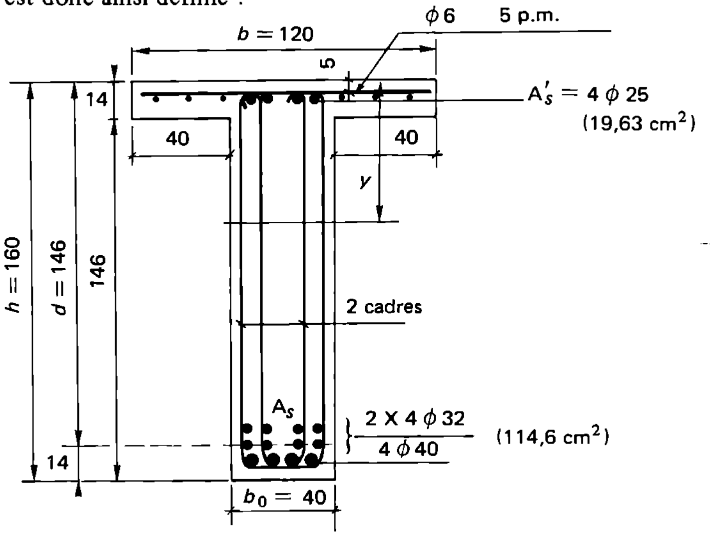
d'où $\sigma_b = 12,85$ MPa

il faut un béton $f_{cj} \geqslant \frac{12,85}{0,6} = 21,4$ MPa

Nous adopterons un béton de résistance courante $f_{cj} = 20$ MPa mais nous rajouterons quelques armatures en compression, d'une part pour la rigidité de la cage d'armatures et d'autre part, pour que cet exercice de calcul comporte des armatures comprimées ; nous avons adopté :

$$A'_s = 4\ \phi\ 25\ \text{H.A. Fe E 40} = 1963\ \text{mm}^2 = 19,63\ 10^{-4}\ \text{m}^2.$$

La section est donc ainsi définie :



B.7.3. Calcul à l'état limite ultime

a) Suppositions

Le béton a atteint $f_{bu} = 0{,}85 \dfrac{20}{1{,}5} = 11{,}3$ MPa et $\epsilon_{bu} = 3{,}5$ ‰. (Pivot B)

L'acier a atteint :

en traction : $f_{su} = \dfrac{f_e}{1{,}15} = \dfrac{400}{1{,}15} = 347{,}8$ MPa

en compression $f'_{su} = 347{,}8$ MPa :

en effet, les aciers comprimés ont accompagné le béton dans son raccourcissement ultime $\epsilon_{bu} = 3{,}5$ ‰ et ont atteint (tout juste) leur palier plastique et la contrainte $f_e/1{,}15$.

b) Équation des forces :

$$F_b + F'_s = F_s = A_s \times f_{su} = 114{,}6 \cdot 10^{-4} \times 347{,}8 = 3{,}986 \text{ MN.}$$

Pour exprimer la force F_b, il faut tout d'abord se rendre compte si $0{,}8\,y >$ ou $< h_0 = 14$ cm (épaisseur du hourdis).

En effet, si $0{,}8\ y < h_0$, la largeur totale $b = 1{,}20$ se trouve comprimée sur une hauteur constante $0{,}8\ y$ et on est ramené au calcul d'une section rectangulaire de largeur b (au lieu de b_0).

Par contre si $0{,}8\ y > h_0$, une partie de l'âme se trouve également comprimée et il faudra en tenir compte dans le calcul de F_b en fonction de y.

On commence donc par saturer la table de compression en supposant

$$0{,}8\,y = h_0, \text{ on a alors } F_b = f_{bu} \times h_0 \times b$$

$$F_b = 11{,}3 \times 0{,}14 \times 1{,}20 = 1{,}898 \text{ MN} = 1898 \text{ kN}$$

C'est nettement inférieur à $F_S = 3{,}986$ MN.

On a donc $0{,}8\,y > h_0$ d'où l'équation des forces :

$$F_b = (2 \times 0{,}40 \times 0{,}14 + 0{,}8\,y \times 0{,}40) \times 11{,}3 =$$

$$F_b = 3{,}616\,y + 1{,}266 \text{ MN}$$

$$F'_s = 347{,}8 \times 19{,}63\ 10^{-4} = 0{,}683 \text{ MN}$$

$$F_b + F'_S = 3{,}616\,y + 1{,}266 + 0{,}683 \text{ MN}$$

$$= 3{,}616\,y + 1{,}949 = F_s = 3{,}986 \text{ MN}$$

$$y = \frac{3{,}986 - 1{,}949}{3{,}616} = 0{,}56 \text{ m}$$

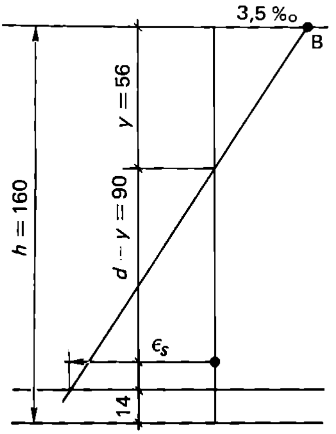
d'où $F_b = 3{,}616 \times 0{,}56 + 1{,}266 = 3{,}291$ MN

Position de F_b : distance δ à la fibre supérieure) équation des moments statiques (par rapport à la fibre supérieure) :

$$F_b \times \delta = \underbrace{f_{bu} \times 2 \times 0{,}40 \times 0{,}14 \times 0{,}07}_{\text{Ailes}} + \underbrace{f_{bu} \times 0{,}40 \times (0{,}8 \times 0{,}56) \times \frac{(0{,}8 \times 0{,}56)}{2}}_{\text{Ame}}$$

avec $F_b = 3{,}291$ MN et $f_{bu} = 11{,}3$ MPa on trouve $\delta = 0{,}164$ m.
d'où $Z_b = 146 - 16{,}4 = 129{,}6$ cm.

c) Équation des déformations : compatibilité



$$\frac{\epsilon_s}{0{,}90} = \frac{3{,}5\ ‰}{0{,}56}$$

$$\epsilon_s = 5{,}6\ ‰$$

L'acier a bien atteint son palier plastique et les suppositions faites en a) sont donc compatibles.

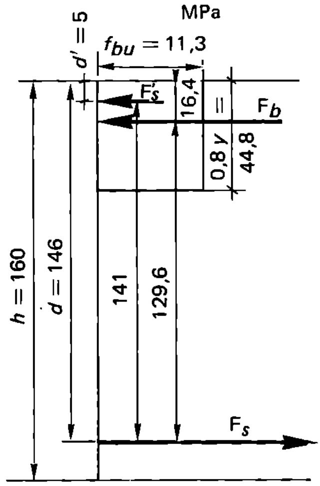
d) Moment résistant ultime :

$F'_s = 0{,}683$ MN $\quad d' = 5$ cm

$F_b = 3{,}616 \times 0{,}56 + 1{,}266 = 3{,}291$ MN

Calculons M_{ru} par rapport à l'axe des armatures tendues :

$$M_{ru} = 3{,}291 \times 1{,}296 + 0{,}683 \times 1{,}41$$
$$= 5{,}228 \text{ MN.m}$$



e) Moment sollicitant ultime

$$M_{su} = 1{,}35 \times 975 + 1{,}50 \times 2450 = 4991 \text{ kN.m}$$

soit $4{,}991 \text{ MN.m} < 5{,}228 \text{ MN.m}$

L'état limite ultime est donc satisfait.

CHAPITRE B.8

CALCUL PRATIQUE A L'ÉTAT-LIMITE DE SERVICE SECTION EN TÉ

Le calcul est fait pour la même poutre que précédemment et qui avait d'ailleurs été prédimensionnée sur les bases de l'état limite de service (§ B.7.2).

B.8.1. Sollicitations de service :

Elles ont été calculées en B.7.2.a pour le prédimensionnement de la section :

Charge permanente	975 kN.m
Charge d'exploitation (y compris coefficient dynamique)	2450 kN.m
$M = M_G + M_Q$ (sans action d'accompagnement)	3425 kN.m

soit 3,425 MN.m

B.8.2. Calcul de y et I

Équation de moment statique (en cm³) (voir fig. § B.7.2.c)

$$\frac{40}{2}y^2 + (120-40)\,14\left(y-\frac{14}{2}\right) + 15 \times 19{,}63\,(y-5) - 15 \times 114{,}61\,(146-y) = 0$$

$$y^2 + 157\,y - 13015 = 0 \qquad y = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

donne $y = 60$ cm **soit 0,60 m**

$$I = 120 \times \frac{60^3}{3} - (120-40)\frac{(60-14)^3}{3} + 15 \times 19{,}63\,(60-5)^2$$

$$+ 15 \times 114{,}61\,(146-60)^2$$

$I = 19.649.917$ cm⁴ **soit $196{,}5 \cdot 10^{-3}$ m⁴**

B.8.3. Contraintes de service

a) Compression du béton sur la fibre supérieure :

$$\sigma_b = \frac{My}{I} = \frac{3{,}425 \times 0{,}60}{196{,}5 \cdot 10^{-3}} = 10{,}5 \text{ MPa}$$

Si le béton est de la qualité courante f_{cj} = 20 MPa la contrainte limite de service est : 0,60 x 20 = 12 MPa on a bien : 10,5 MPa < 12 MPa.

b) Compression des aciers comprimés

$$\sigma_s' = \frac{nM(y-5)}{I} = \frac{15 \times 3{,}425 \times 0{,}55}{196{,}5 \cdot 10^{-3}} = 143{,}8 \text{ MPa.}$$

Pour des aciers H.A. (Fe E 40) la contrainte maximale en service est (dans le cas de la fissuration préjudiciable) la plus petite des deux valeurs :

$$2/3\, f_e = 2/3\ 400 = 266{,}7 \text{ MPa}$$

ou

$$150\,\eta = 150 \times 1{,}6 = 240 \text{ MPa}$$

on a bien : 143,8 < 240 MPa.

c) Traction dans les armatures inférieures

$$\sigma_s = \frac{nM(1{,}46-y)}{I} = \frac{15 \times 3{,}425 \times (1{,}46-0{,}60)}{196{,}5 \cdot 10^{-3}} = 224{,}8 \text{ MPa}$$

on a bien : 224,8 < 240 MPa.

Les conditions de sécurité à l'état limite de service sont donc satisfaites ; (dans le cas de la fissuration préjudiciable).

B.8.4. Armatures transversales de la dalle supérieure

La charge d'exploitation étant très faible (personnel de service), il suffira de prévoir le pourcentage minimal d'armatures pour satisfaire à la condition de non fragilité (voir ch. A.8).

$$\rho = \frac{A_s}{bd} \geqslant 0{,}23 \frac{f_{tj}}{f_e}$$

Dans notre cas $f_{tj} = 0{,}6 + 0{,}06 f_{cj} = 0{,}6 + 0{,}06 \times 20 = 1{,}8$ MPa.

Il faut donc $\frac{A_s}{bd} \geqslant 0{,}23\ \frac{1{,}8}{400} = 0{,}104\ \%$

avec d = 11 cm (compte tenu du recouvrement minimal 2 cm) et sur une longueur b = 1 m 00 = 100 cm, on doit donc avoir $A_s \geqslant 100 \times 11 \times \frac{0{,}104}{100} = 1{,}15$ cm^2 par mètre de longueur de poutre on a adopté 5 ϕ 6 par mètre soit $A_s = 1{,}41$ cm^2.

B.8.5. Armatures transversales de la poutre

Les armatures «transversales» dites également «de couture» et constituées de cadres et étriers placés dans les plans de sections transversales seront déterminées ultérieurement, car elles sont calculées en fonction des contraintes de cisaillement engendrées par l'*effort tranchant* objet du module C suivant.

CHAPITRE B.9

POUTRES EXPÉRIMENTALES SÉCURITÉ

Au centre d'essais des structures de St-Rémy-les-Chevreuse nous avons eu l'occasion d'essayer jusqu'à rupture de nombreuses poutres en béton armé.

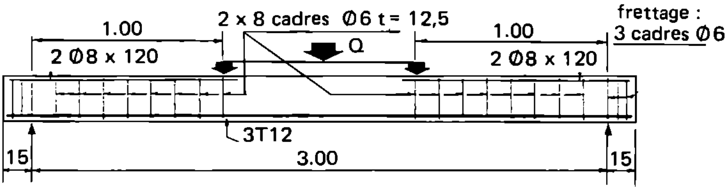
Nous en citerons deux ci-après choisis parmi les plus caractéristiques :

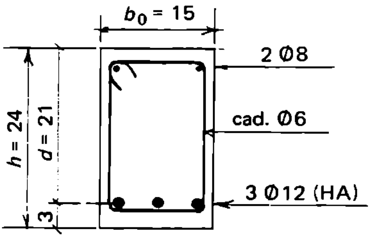
La poutre 1 est sous-armée

La poutre 2 est normalement armée.

Les calculs sont donnés succinctement.

B.9.1. Poutre n° 1 A (sous-armée).





$3\ \phi\ 12 = 3{,}39\ \text{cm}^2$

Le pourcentage d'acier est $= \dfrac{3{,}39}{15 \times 21} = 1.08\ \%$ (faible).

a) Actions

Charge uniforme de poids propre :

$$g = (0{,}24 \times 0{,}15) \times 25 = 0{,}9 \text{ kN.mc}^{t}$$

Q est la charge appliquée au vérin et comprend également le poids du chevêtre.

$$M_G = \frac{0{,}9 \times 3^2}{8} = 1{,}013 \text{ kN.m}$$

$$M_Q = \frac{Q}{2} \times 1 \text{ m } 00 = 0{,}5 \text{ Q kN.m (avec Q en kN).}$$

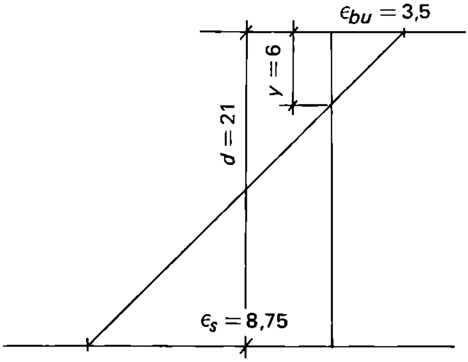
b) Caractéristiques des matériaux

La résistance du béton le jour de l'essai a été de 31,4 MPa (moyenne de trois éprouvettes très peu dispersées) ; on peut admettre que la résistance caractéristique serait $f_{cj} = 31{,}4 - 2{,}7 = 28{,}7$ MPa (§ A.3.1.a) et la résistance de calcul à l'E.L.U :

$$f_{bu} = \frac{0{,}85 \times 28{,}7}{1{,}5} = 16{,}3 \text{ MPa}$$

Pour les aciers H.A Fe E 40, on prend la valeur forfaitaire $\frac{f_e}{1{,}15} = 348$ MPa.

c) Calcul de y



$A_s = 3\ \phi\ 12 = 339\ \text{mm}^2$; en supposant que les aciers aient atteint leur palier plastique, on a :

$$F_s = 339 \times 348 = 118 \text{ kN}$$

$$F_b = \text{correspondant} = 118 \text{ kN}$$

On peut écrire :

$F_b = 0{,}8\,y \times 0{,}15 \times 16{,}3 = 1{,}96\,y$ en MN on a donc : 118 kN = 1960 y d'où $y = \frac{118}{1960} = 0{,}06$ m soit $y = 6$ cm.

Si on suppose que le béton a atteint son raccourcissement ultime, $\epsilon_{bu} = 3{,}5$ ‰, on aura : $\epsilon_s = \dfrac{(21-6) \times 3{,}5}{6} = 8{,}75$ ‰.

Le palier plastique des aciers est atteint, il y a donc compatibilité des hypothèses.

d) **Moment résistant ultime** :

$$z = d - \frac{0{,}8\,y}{2} = 21 - \frac{0{,}8 \times 6}{2} = 18{,}6 \text{ cm}$$

$$M_{ru} = F_s \times z = 118 \times 0{,}186 = 22 \text{ kN.m}$$

e) **Moment sollicitant à l'E.L.U.**

$$M_{su} = 1{,}35\ M_G + 1{,}5\ M_Q$$
$$M_{su} = 1{,}35 \times 1{,}013 + 1{,}5 \times 0{,}5\ Q = 1{,}37 + 0{,}75\ Q.$$

f) **Charge maximale Q admissible à l'E.L.U.** ; elle serait atteinte pour :

$$M_{su} = M_{ru}\ ;\ 1{,}37 + 0{,}75\ Q = 22$$

$$Q = \frac{20{,}63}{0{,}75} = 27{,}5 \text{ kN}$$

La charge qui a provoqué la rupture a été de 57,5 kN.

Le coefficient de sécurité à la rupture est donc, pour cette poutre de :

$$\frac{57{,}5}{27{,}5} = 2{,}1$$

g) **Prévision de la charge de rupture Q_R** :

On peut calculer à priori la charge de rupture Q_R en prenant les valeurs *réelles* de résistance des matériaux et *aucun* coefficient de sécurité (les $\gamma = 1$).

Pour l'acier utilisé, on a obtenu aux essais $\sigma_s = 460$ MPa (à allongement 10 ‰). On aura donc à l'E.L.U. : $F_s = 339 \times 460 = 155{,}9$ kN

$$F_b = 0{,}8\,y \times 0{,}15 \times 31{,}4 = 3{,}77\,y \text{ MN}$$

d'où $$y = \frac{155{,}9}{3770} = 0{,}041 \text{ soit } y = 4{,}1 \text{ cm} \simeq 4 \text{ cm}.$$

Si on suppose que $\epsilon_{bu} = 3{,}5$ ‰.

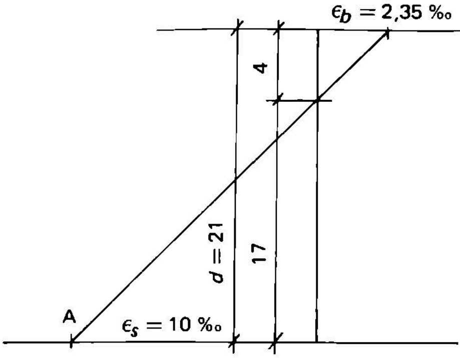
On aurait $\epsilon_s = (21-4)\dfrac{3{,}5\ ‰}{4} = 14{,}9$ ‰.

L'acier dépasse son allongement ultime 10 ‰ ; il n' y a donc pas compatibilité et il faut refaire le calcul en prenant $\epsilon_s = 10$ ‰ ; on calcule alors : (Pivot A)

$$\epsilon_{bu} = \frac{4 \times 10}{17} = 2{,}35 \text{ ‰}.$$

La poutre est donc effectivement sous-armée puisque l'on arrive à épuisement

des aciers sans atteindre l'épuisement du béton qui n'est atteint qu'à $\epsilon_{bu} = 3{,}5$ ‰.



En admettant que le diagramme rectangulaire simplifié reste applicable (c'est une approximation car $\epsilon_{bu} < 3{,}5$ ‰) on peut écrire :

Moment de rupture $M_R = F_s \times z$

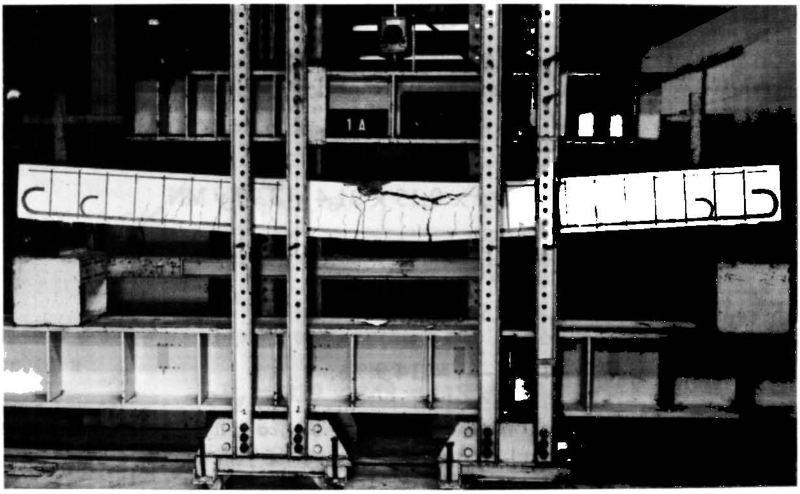
$$z = d - \frac{0{,}8\,y}{2} = 21 - \frac{0{,}8 \times 4{,}1}{2} = 19{,}4 \text{ cm}$$

$$M_R = 155{,}9 \times 0{,}194 = 30{,}245 \text{ kN.m}$$

$$M_{QR} = M_R - M_G = 30{,}245 - 1{,}013 = 29{,}232$$

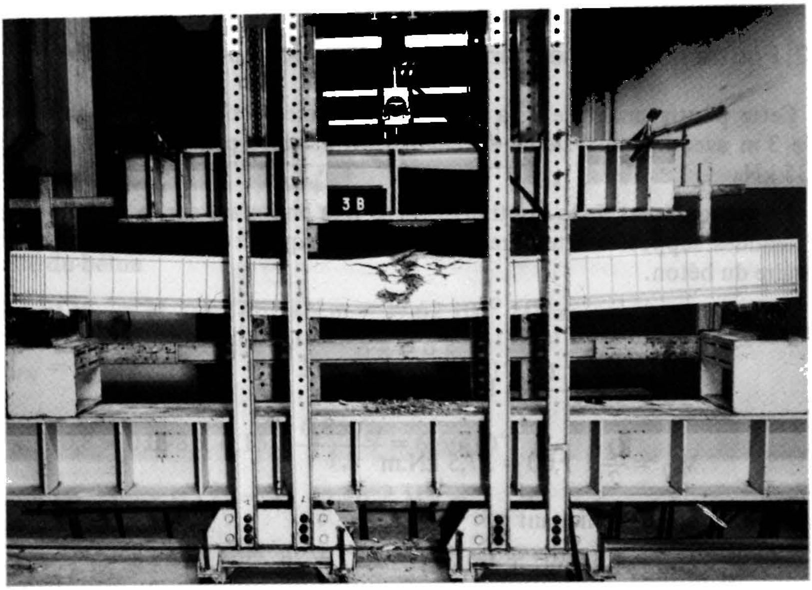
$$M_{QR} = 0{,}5\, Q_R \text{ d'où } Q_R = \frac{29{,}232}{0{,}5} = 58{,}5 \text{ kN}$$

La charge de rupture expérimentale a été de 57,5 kN ; l'approximation est très bonne et même excellente : < 2 %.

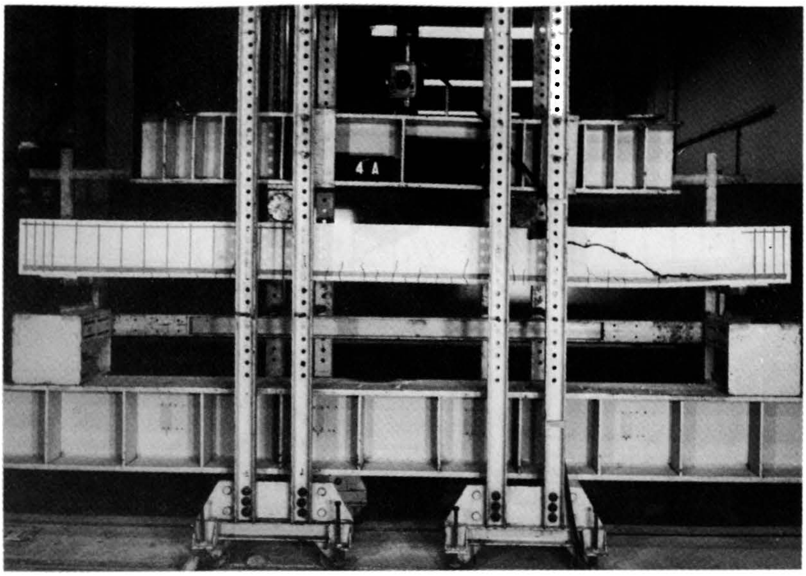


Poutre 1 A (sous-armée 3 ϕ 12 H.A.) ; la rupture a été atteinte par allongement excessif des armatures d'où larges fissures et faible hauteur du béton comprimé qui ne s'est écrasé qu'en poussant la déformation au-delà de la charge maximale atteinte (57,5 kN) Pivot A.

Poutre 2 A : Rupture d'une poutre normalement armée (2 ϕ 10 + 2 ϕ 14) ; les fissures attestent que la limite élastique des armatures a été dépassée et la charge maximale (77 kN) a été limitée simultanément par l'écrasement du béton.



Poutre 3 B : (sur-armée 6 ϕ 20 H.A.) ; faible allongement des armatures, fissures fines, grande hauteur de la zone de béton comprimé qui, en s'écrasant, a limité l'augmentation de la charge (98 kN). Pivot B.



Poutre 4 A : Rupture par effort tranchant dans une zone sans armatures de couture (96 kN). La poutre était fortement armée (3 ϕ 25 H.A.) pour ne pas périr prématurément en flexion.

B.9.2. Poutre normalement armée. Optimisation (poutre n° 2 A).

Cette poutre analogue à la précédente (même section 15 x 24 cm et même portée 3 m avec même système de charge) est calculée pour une charge de service Q = 35 kN.

La section étant fixée l'optimisation se fera en jouant sur la section des armatures tendues supposées atteindre leur palier plastique et sur la résistance minimale nécessaire du béton.

a) Actions

$$M_G = \frac{0,9 \times 3^2}{8} = 1,013 \text{ kN.m}$$

$$M_Q = \frac{Q}{2} \times 1,00 = 17,5 \text{ kN.m}$$

Moment ultime sollicitant :

$$M_{su} = 1,35\, M_G + 1,5\, M_Q = 1,37 + 26,25 = 27,62 \text{ kN.m}$$

b) Caractéristiques des matériaux

La résistance du béton le jour de l'essai devra être en valeur moyenne $\overline{f_{cj}}$;

la résistance correspondante caractéristique sera évaluée à $f_{cj} = \overline{f_{cj}} - 2{,}7$ et la résistance de calcul à l'E.L.U. sera : $\frac{0{,}85\, f_{cj}}{1{,}5}$.

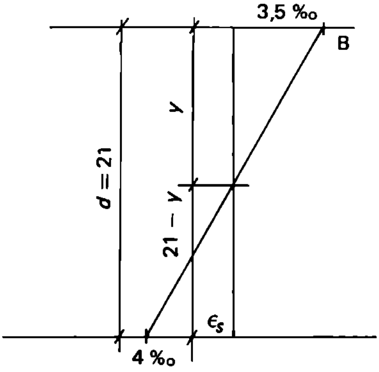
Les aciers seront des aciers H.A. Fe E 40 dont la résistance de calcul à l'E.L.U. est $\frac{f_e}{1{,}15} = 348$ MPa.

c) Calcul de *y*

Si l'on veut que les aciers atteignent leur palier plastique et la contrainte 348 MPa il faut que leur allongement atteigne au moins 4 ‰ (graphique page 26). En supposant que le béton atteint son raccourcissement ultime $\epsilon_{bu} = 3{,}5$ ‰, on peut écrire :

$$\epsilon_s = 4 = \frac{(21 - y) \times 3{,}5}{y}$$

$$y = 9{,}8 \text{ cm} = \mathbf{0{,}098 \text{ m}}$$



d) Qualité du béton

Il faut $M_{ru} = M_{su} = 27{,}62$ kN.m $= 27{,}62\ 10^{-3}$ MN.m

$M_{ru} = F_b \times z \qquad z = 21 - \frac{0{,}8 \times 9{,}8}{2} = 17{,}1 \text{ cm} = 0{,}171 \text{ m}$

$F_b = 0{,}8 \times 0{,}098 \times 0{,}15 \times \frac{0{,}85\, f_{cj}}{1{,}5} = 6{,}66\ 10^{-3}\ f_{cj}$

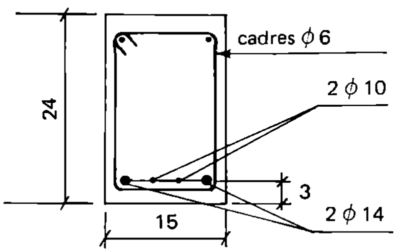
$6{,}66\ 10^{-3}\ f_{cj} \times 0{,}171 = 27{,}62\ 10^{-3}$ MN.m

d'où $f_{cj} = \frac{27{,}62}{1{,}14} = 24{,}23$ MPa.

On adoptera un béton de bonne résistance $f_{cj} = 25$ MPa

Résistance moyenne à viser : $\overline{f_{cj}} \cong 30$ à 35 MPa sur chantier (tabl. page 20).

e) Section des armatures



$F_s = F_b = 6{,}66\ 10^{-3} \times 24{,}23 = 161{,}37\ 10^{-3}$ MN

$A_s \times 348 = 161{,}37\ 10^{-3}$ MN

$$A_s = \frac{161{,}37\ 10^{-3}}{348} (m^2) = 463{,}7 \text{ mm}^2$$

$2\ \phi\ 10 = 157$

$2\ \phi\ 14 = 308$

465 mm²

f) Prévision de la charge de rupture

Nous allons supposer que la résistance réelle moyenne du béton est 28 MPa (valeur trouvée sur la moyenne de trois éprouvettes très peu dispersées) et que les aciers sont des aciers écrouis de type 2 à haute adhérence Fe E 40 mais que l'on connaît par des essais la limite élastique réelle des aciers : $f_e = 420$ MPa. On utilisera alors la courbe réelle déformation-contrainte correspondante (page 26).

$$F_b = 0{,}8\,y \times 0{,}15 \times 28 = 3{,}36\,y \text{ MN (avec } y \text{ en } m)$$

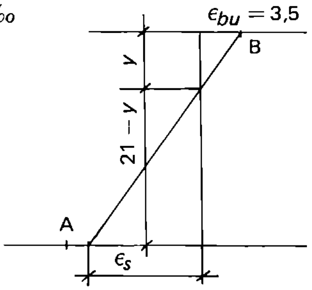
$$F_b = F_s = A_s f_e = 465\ 10^{-6} \times 420 = 195{,}3\ 10^{-3} \text{ MN}$$

(en supposant que la contrainte dans les aciers atteindrait f_e)

d'où $3{,}36\,y = 195{,}3\ 10^{-3}$ $y = 0{,}058$ m

on peut alors calculer ϵ_s correspondant :

$$\epsilon_s = \frac{(21 - 5{,}8) \times 3{,}5}{5{,}8} = 9{,}2\ ‰$$



Pour $\epsilon_s = 9{,}2$ ‰ on trouve sur la courbe réelle contrainte-déformation $\sigma_s = 456$ MPa. Il y a incompatibilité avec l'hypothèse précédente ($\sigma_s = f_e$) il faut «réitérer» le calcul de y :

$3{,}36\,y = 465\ 10^{-6} \times 456 = 212\ 10^{-3}$

d'ou **$y = 0{,}063$ m**

On a alors $\epsilon_s = \dfrac{(21 - 6{,}3)\ 3{,}5}{6{,}3} = 8{,}2$ ‰ ; à cet allongement correspond une contrainte $\sigma_s = 450$ MPa d'où une nouvelle itération sur y :

$$3{,}36\,y = 465\ 10^{-6} \times 450 = 209{,}2\ 10^{-3}\ \text{MN}$$

d'ou $$y = \mathbf{0{,}062\ m}.$$

Il est inutile de réitérer pour chercher à préciser y à moins d'un mm près.

On a donc en définitive $z = 21 - \dfrac{0{,}8 \times 6{,}2}{2} = 18{,}5$ cm $= 0{,}185$ m

$$F_b = (0{,}8 \times 0{,}062) \times 0{,}15 \times 28 = 208{,}32\ 10^{-3}\ \text{MN ou } 208{,}32\ \text{kN}.$$

(il y a maintenant compatibilité puisque $F_s = 209{,}2\ 10^{-3}$ MN).

$$M_R = F_b \times z = 208{,}32 \times 0{,}185 = 38{,}540\ \text{kN.m}$$

$$M_{QR} = M_R - M_G = 38{,}540 - 1{,}013 = 37{,}527\ \text{kN.m}$$

d'où $$Q_R = \frac{37{,}527}{0{,}50} = \mathbf{75\ kN}.$$

La charge de rupture expérimentale a été de 77 kN ; l'approximation est également très bonne (< 3 %) ; cela montre la validité de la méthode de calcul à l'état limite ultime.

Le coefficient de sécurité à la rupture pour cette poutre ressort à $\dfrac{77}{35} = 2{,}2$.

CHAPITRE B.10

SCHÉMA DE CALCUL A L'ÉTAT-LIMITE ULTIME EN FLEXION SIMPLE

1. Prédimensionnement : h, b_0, A_s, d,
   d'après charge d'exploitation prévue
2. *Calcul de* M_{Gu} d'après prédimensionnement
   Calcul de M_{Qu} d'après charge d'exploitation prévue.

3. Suppositions : Acier et béton atteignent leur contraintes ultimes f_{su} et f_{bu}.
   → Équations des forces → y

4. *Équations de déformation* d'après valeur de y trouvée (triangles semblables).

   Calcul de $\epsilon_s = \epsilon_{bu} \dfrac{d - y}{y}$ en supposant $\epsilon_{bu} = 3{,}5$ ‰.

Deux cas :

1er cas - $\epsilon_s \leqslant 10$ ‰ lire σ_s correspondant sur la courbe contrainte/déformation
Si $\sigma_s = f_{su}$ → compatibilité
Si $\sigma_s < f_{su}$ réitérer avec nouvelle valeur de σ_s
2ème cas - $\epsilon_s > 10$ ‰ partir du pivot A ($\epsilon_s = 10$ ‰)
diminuer $\sigma_{bu} < f_{bu}$ et réitérer jusqu'à compatibilité

→ y (définitif)

5. *Calcul de* $z = d - 0{,}4\,y$ et $M_{ru} = F_b \times z$
   Vérifier que $M_{Gu} + M_{Qu} \leqslant M_{ru}$.

6. *Pour calculer* Q_{max} (charge limite d'exploitation) et si nécessaire, écrire l'égalité et calculer :

$$M_{Qu} = M_{ru} - M_{Gu}$$

   d'où valeur de Q_{max}, ; dans cette égalité, on prend Q_{max} comme inconnue.

CHAPITRE B.11

MÉTHODE DU MOMENT RÉDUIT μ

Elle est exposée au paragraphe G.5.3.

Elle se déduit, en effet, de la méthode générale exposée au chapitre G.3. du module G «flexion composée».

Elle constitue une *méthode très pratique* mais elle ne pouvait être présentée qu'après la définition du moment réduit μ à l'occasion de l'étude de la flexion composée. C'est pourquoi elle figure au paragraphe G.5.3. auquel il convient de se reporter.

CHAPITRE B.12

SCHÉMA DE CALCUL A L'ÉTAT-LIMITE DE SERVICE EN FLEXION SIMPLE

1. *Prédimensionnement de la section de béton :* h, b_0 ;

2. *Calcul de* M_G (d'après prédimensionnement) *et de* M_Q (d'après programme d'exploitation).

3. *Prédimensionnement des armatures* A_s :

   En supposant $z \simeq 0{,}8\,h$ $\quad A_s \simeq \dfrac{M_G + M_Q}{z \times \bar{\sigma}_s}$

   (valeurs de $\bar{\sigma}_s$ en A.3.2.f.)

4. *Calcul de y* par l'équation des moments statiques (B.3.4.c.).

5. *Calcul de I* par rapport à la fibre neutre (B.3.4.d.).

6. *Calcul des contraintes* maximales et vérification par rapport aux contraintes limites à l'E.L.S. :

   $$\sigma_b = \frac{My}{I} \leqslant \bar{\sigma}_b = 0{,}60\,f_{cj}$$

   $$\sigma_s = \frac{n\,M\,(d-y)}{I} \leqslant \begin{cases} 2/3\,f_e \text{ ou } 150\,\eta \text{ (fissuration préjudiciable)} \\ 0{,}5\,f_e \text{ ou } 110\,\eta \text{ (fissuration très préjudicable).} \end{cases}$$

MODULE C - ETATS-LIMITES A L'EFFORT TRANCHANT

Nous avons donné au paragraphe A.5.5. les diagrammes usuels des efforts tranchants dans les cas de charges les plus courants. Il est à remarquer qu'en général c'est dans les sections voisines des appuis que se produisent les efforts tranchants maximaux ; c'est donc dans ces sections que se fera le calcul des contraintes maximales de cisaillement du béton et la détermination des armatures transversales nécessaires et *uniquement vis-à-vis de l'état-limite ultime* (pas de vérification à l'état-limite de service).

CHAPITRE C.1

CALCUL DE L'EFFORT TRANCHANT LIMITE

On calculera, dans la section intéressée, les valeurs des efforts tranchants des actions permanentes $V_{G\max}$ (et éventuellement $V_{G\min}$) et des actions variables de base V_{Q1} (et éventuellement d'accompagnement V_{Qi}) ; pour le calcul de ces efforts V, on appliquera les règles de la R.D.M. et on pourra se référer aux diagrammes données au paragraphe A.5.5.

L'effort tranchant ultime V_u à prendre en compte dans le calcul à l'E.L.U. sera déterminé en application de la combinaison fondamentale définie au paragraphe A.5.4.c.

Réduction de V au voisinage des appuis : (* A.5.1,231)

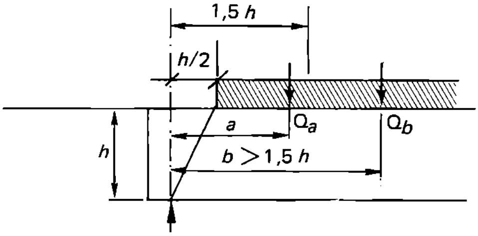
Il est loisible de tenir compte, *pour le calcul des armatures d'âme* (et non de τ béton) d'une réduction de V ; en effet, lorsque les charges sont très voisines d'un appui, on admet qu'une partie se transmet directement à l'appui par une bieille fictive (de compression) inclinée. Cette possibilité diminue au fur et à mesure que la charge s'éloigne de l'appui ; on en tient compte par les dispositions suivantes :

a) Les charges réparties situées entre l'appui et les sections distantes de $h/2$ ne sont pas prises en compte.

b) L'effort tranchant développé par une charge concentrée appliquée à une distance $a < 1{,}5\ h$ est minorée par le facteur $\dfrac{a}{1{,}5\ h}$.

Q_b est à prendre entièrement en compte

Q_a est à prendre en compte pour la valeur $\dfrac{a}{1{,}5\ h}\ Q_a$.



CHAPITRE C.2

CONTRAINTES TANGENTES

C.2.1. Contraintes de calcul

La R.D.M. donne la formule suivante permettant de calculer la contrainte de cisaillement ou contrainte tangente dans la section où se produit un effort tranchant V.

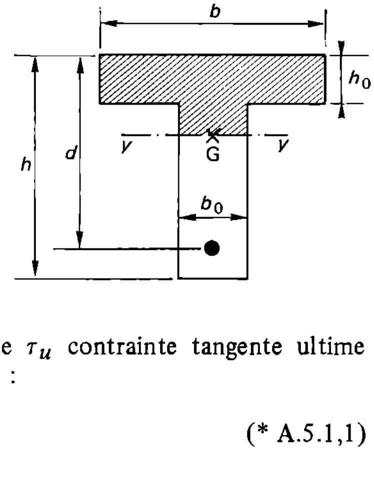
$$\tau = \frac{V.S.}{b_0 I}.$$

Sa valeur maximale se produit au niveau du centre de gravité.

S = moment statique par rapport à l'axe yy de la surface située au-dessus du point où l'on calcule τ.

b_0 = largeur de la section cisaillée.

I = moment d'inertie de la section par rapport à l'axe yy (B.3.4.d).



Si l'on pose $\frac{I}{S} = z$ on a $\tau = \frac{V}{b_0 z}$.

Le réglement admet par simplification que τ_u contrainte tangente ultime sera calculée «conventionnellement» par la formule :

$$\tau_u = \frac{V_u}{b_0 d} \qquad \text{(* A.5.1,1)}$$

d = hauteur utile de la poutre.

τ_u = ne représente donc pas la valeur réelle de la contrainte exercée, mais une fraction de l'ordre de 0,8 à 0,9 car $z \simeq 0,8$ à $0,9\,d$.

C.2.2. Contraintes limites (*A.5.1,21)

Lorsque les armatures d'âme sont perpendiculaires à la fibre moyenne (cas général) la contrainte de calcul τ_u doit être au plus égale aux deux valeurs suivantes :

a) Cas courants : 0,13 f_{cj} ou 4 MPa.

b) Cas où la fissuration est jugée préjudiciable ou très préjudiciable :

$$0{,}10 f_{cj} \text{ ou } 3 \text{ MPa.}$$

Nota : Se reporter au réglement dans le cas (peu fréquent) où les armatures d'âme sont inclinées. (*A5.1,22)

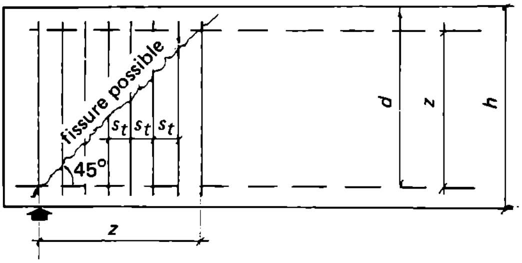
CHAPITRE C.3

ARMATURES D'ÂME

C.3.1. Section résistante

Si la fissuration devait se produire, elle se développerait suivant un angle de 45° (environ) et les armatures d'âme traversant cette fissure devrait l'empêcher de s'ouvrir en s'opposant à l'effort provoquant l'ouverture et qui n'est autre que l'effort tranchant V.

Le schéma de résistance est le suivant :



nombre de nappes intéressées $n = \dfrac{z}{s_t}$

Si A_t est la section d'acier d'une nappe, la section totale intéressée est

$$n\,A_t = \frac{A_t z}{s_t}.$$

Elle doit résister à l'effort tranchant V_u sans que la contrainte dans les armatures ne dépasse

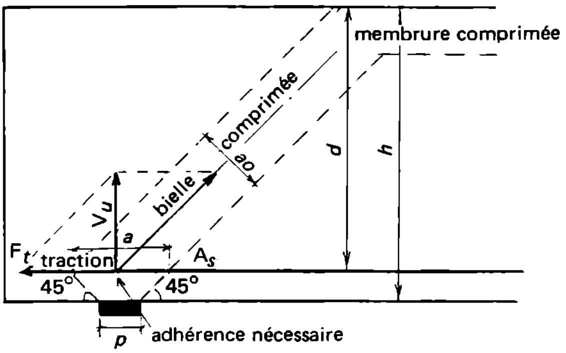
$$\frac{f_e}{\gamma_s} \text{ avec } \gamma_s = 1{,}15 \text{ (E.L.U.).}$$

On doit donc avoir : $\dfrac{A_t z}{s_t} \times \dfrac{f_e}{1{,}15} \geqslant V_u = \tau_u\, b_0\, d$

d'où :
$$\frac{A_t}{b_0\, s_t} \geqslant \frac{d \times 1{,}15 \times \tau_u}{f_e\, z}$$

si on suppose $z \simeq 0{,}9\, d$ on a : $\dfrac{A_t}{b_0\, s_t} \geqslant \dfrac{\tau_u}{0{,}8\, f_e}$.

Mais il est admis que, dans le schéma de résistance ultime, une partie de l'effort tranchant est équilibrée par la membrure comprimée et une bielle comprimée ancrée à sa base sur les armatures inférieures A_s.



On a $F_t = V_u$; les armatures longitudinales A_s doivent équilibrer F_t ; il faut donc $A_s \times \dfrac{f_e}{\gamma_s} \geqslant V_u$ soit $A_S \geqslant \dfrac{V_u\, \gamma_s}{f_e}$.

On tient compte de ce schéma résistant, en prenant en compte dans la formule précédente, non pas la contrainte τ_u (due à V_u), mais une contrainte réduite : $\tau_u - 0{,}3\, f_{tj}\, k$ avec : (*A5.1.232)

$k = 1$ dans le cas de la flexion simple

$k = 1 + 3\dfrac{\sigma_{cm}}{f_{cj}}$ en flexion composée avec compression, σ_{cm} désignant la contrainte moyenne de compression de la section totale du béton sous l'effort normal de calcul.

$k = 1 - 10\dfrac{\sigma_{tm}}{f_{cj}}$ en flexion composée avec traction, σ_{tm} désignant la contrainte moyenne de traction de la section totale du béton sous l'effort normal de calcul.

$k = 0$ en cas de reprise de bétonnage ou lorsque la fissuration est jugée très préjudiciable, (voir Nota).

En définitive : on choisira une section A_t pour une nappe et on déterminera l'espacement maximal s_t :

$$s_t \leqslant \frac{0{,}8\, f_e\, A_t}{b_0\, (\tau_u - 0{,}3\, f_{tj}\, k)}$$

Pour le choix de la section A_t on adoptera un diamètre ϕ_t et un nombre de brins qui conduisent à un espacement raisonnable des nappes.

Le réglement précise les règles suivantes : $\phi_t \leqslant \frac{h}{35}$; (*A.7.2.2) $\phi_t \leqslant \phi_l$ (barres longitudinales) et $\leqslant \frac{b_0}{10}$. (Se tenir en dessous en général).

En exprimant A_t en cm^2 et b_0 en cm, on aura s_t en cm.

C.3.2. Section minimale (*A.5.1,31)

Pour le cas où les conditions de résistance précédentes conduiraient à des armatures d'âme peu importantes, il convient de ne pas descendre au-dessous d'un minimum de sécurité ; on doit avoir :

a) $s_t \leqslant 0{,}9\, d$ ou 40 cm (Se tenir en dessous de 0,9 d)

b) $\frac{A_t f_e}{b_0\, s_t} \geqslant 0{,}4$ MPa.

Nota - Le réglement donne également quelques règles particulières (reprise de bétonnage, liaison âme-membrure, torsion, sections creuses...) auxquelles on se réfèrera le cas échéant ; en particulier, en cas de reprise de bétonnage avec *«indentations»* dont la saillie atteint au moins 5 mm on pourra prendre $k = 1$ (au lieu de 0) sauf si la fissuration est jugée très préjudiciable.

Il est rappelé que f_{tj} est la résistance caractéristique du béton en traction :

$$f_{tj} = 0{,}6 + 0{,}06\, f_{cj}$$

Les commentaires apportent les précisions suivantes :

Dans le cas courant de la flexion simple avec $\alpha = 90°$ (armatures d'âme droites), la relation s'écrit : $\frac{A_t}{b_0\, s_t} \geqslant \frac{\tau_u - 0{,}3\, f_{tj}}{0{,}8\, f_e}$ (car $k = 1$).

Sauf traitement particulier, une reprise de bétonnage constitue un point faible et doit donc être traitée conformément à la règle des coutures donnée en A.5.3. ce qui revient à prendre $k = 0$. L'attention est attirée sur le fait que lorsque la surface de reprise se situe à un niveau différent de celui de la fibre neutre, la justification doit être faite à ce niveau avec la valeur correspondante du cisaillement qui diffère de la valeur conventionnelle τ_u.

En cas d'indentations, cette précision doit être portée sur les dessins.

Nous signalons enfin que l'article A.8.3* prévoit que dans le cas des poutres de grande hauteur, il doit être prévu des «armatures de peau» dont la section doit être d'au moins 3 cm^2 par mètre de longueur de paroi mesurée perpendiculairement à leur direction ; mais l'article A.4.5.34 prévoit que dans le cas où la fissuration est considérée comme très préjudiciable, cette section minimale est portée de 3 à 5 cm^2.

CHAPITRE C.4

(*A.5.1,31)

CONDITIONS D'APPUI

Si p est la dimension longitudinale de la plaque d'appui règnant sous la largeur b_0 de la poutre, on a $a = p + 2\,(h - d)$. Il convient de vérifier :

$$\frac{V_u}{b_0\,a} \leqslant 0{,}4\,\frac{f_{cj}}{\gamma_b}\;(\gamma_b = 1{,}5).$$

Dans la zone d'appui, l'effort tranchant V_u engendre une compression $V_u\sqrt{2}$ dans la bielle de béton découpée par les fissures à 45° et une traction V_u dans les armatures horizontales qui devront donc présenter là une section A_s suffisante.

Il faut $A_s\left(\frac{f_e}{\gamma_s}\right) \geqslant V_u$ soit $A_s \geqslant \frac{\gamma_s\,V_u}{f_e}$ $(\gamma_s = 1{,}15)$.

D'autre part, il conviendra que la bielle inclinée ne puisse glisser sur les armatures inférieures d'où la nécessité d'adopter des dispositions donnant une sécurité suffisante pour l'adhérence et l'ancrage des barres.

CHAPITRE C.5

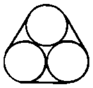
ADHÉRENCE

C.5.1. Définition (*A.6.1,1)

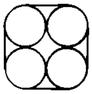
La liaison d'adhérence entre une armature et le béton est mesurée par la contrainte d'adhérence τ_s définie par la formule $\tau_s = \frac{1}{u} \times \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}$ où $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}$ est la variation par unité de longueur x, de l'effort axial F ; u est le périmètre utile de l'armature lorsqu'il s'agit de barres isolées.

Lorsque les barres sont en paquets, le périmètre utile est pris égal au périmètre minimal circonscrit à la section droite du paquet, par exemple : (*A6.1,3)

$u = (\pi + 2)\,\phi$

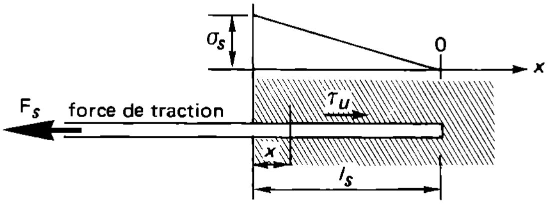


$u = (\pi + 3)\,\phi$



$u = (\pi + 4)\,\phi$
(déconseillé)

C.5.2. Calcul de la contrainte d'adhérence



Considérons une barre de diamètre ϕ ancrée par scellement droit de longueur l_s dans un bloc de béton ; si l'on exerce une traction F_s sur cette barre, la contrainte

dans la barre est $\sigma_s = \dfrac{4\,F_s}{\pi\,\phi^2}$ à l'entrée dans le béton et diminue progressivement jusqu'à 0 à son extrémité et l'ancrage résistera, si la totalité de cette force F_s peut être équilibrée par la contrainte d'adhérence répartie sur le pourtour de la barre et sur la longueur l_s qui doit donc être suffisante.

Si $\bar{\tau}_s$ est la contrainte d'adhérence limite ultime, la force F_s maximale est prise égale à $F_s = \dfrac{\pi\,\phi^2}{4} f_e$ et l'on peut écrire avec : $u = \pi\,\phi$ pour une barre isolée $\dfrac{\pi\,\phi^2}{4} f_e = \pi\,\phi\,l_s\,\bar{\tau}_s$ d'où $l_s = \dfrac{\phi\,f_e}{4\,\bar{\tau}_s}$.

l_s est appelée *longueur de scellement droit* pour une barre isolée.

Nota : *l'ancrage* de l'ensemble d'un paquet de barres n'est pas admis ; une barre est toujours ancrée individuellement.

La contrainte limite d'adhérence sur un ancrage, $\bar{\tau}_s$, est supposée constante et égale à : $\bar{\tau}_s = 0{,}6\;\psi_s^2\,f_{tj}$ (*A.6.1,21)

avec $\psi_s = 1$ pour les ronds lisses ($\bar{\tau}_s = 0{,}6\,f_{tj}$)

et $\psi_s = 1{,}5$ pour les barres à haute adhérence ($\bar{\tau}_s = 1{,}35\,f_{tj}$)

f_{tj} = résistance conventionnelle du béton en traction $= 0{,}6 + 0{,}06\,f_{cj}$.

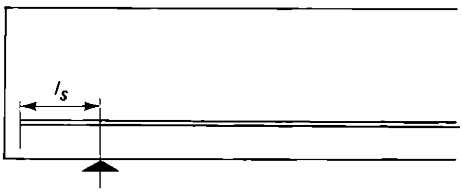
C.5.3. Ancrages rectilignes (*A.6.1,221)

A défaut de calcul précis, on pourra adopter, en pratique, les valeurs suivantes :

$l_s = 40\,\phi$ pour les aciers H.A. Fe E 40

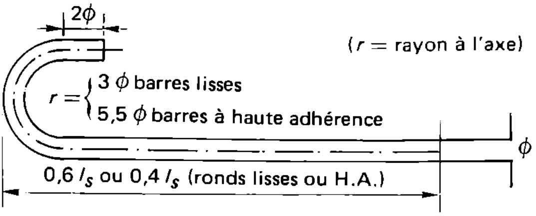
$l_s = 50\,\phi$ pour les aciers H.A. Fe E 50 et pour les aciers lisses Fe E 22 et Fe E 24.

On obtient très approximativement ces valeurs en supposant que l'on a $f_{cj} \simeq 20$ à 22 MPa.



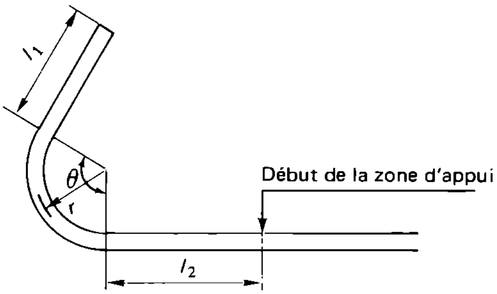
C.5.4. Ancrages courbes (*A.6.1,253)

On peut améliorer l'ancrage des barres par des crochets dont les dispositions sont indiquées ci-après :



Crochet normal

Le diamètre minimal du mandrin de pliage est de 5 ϕ pour les aciers lisses et de 10 ϕ pour les aciers H.A., toutefois, pour ces derniers, le diamètre du mandrin est augmenté pour les très grosses barres (400 mm pour les ϕ 32 et 500 mm pour les ϕ 40) et il est conseillé d'utiliser des ancrages courbes dont l'angle au centre est de 120° du type suivant : [Réf. n° 13].



Dans ce cas on doit avoir : $l_2 + \alpha l_1 + \beta r = l_s$. (Réf. biblio. n° 13)

Cette formule découle de la prise en compte du frottement en courbe qui rend plus efficace le phénomène d'ancrage par simple adhérence ; les valeurs de α et β sont données ci-dessous en fonction de l'angle au centre θ en degrés :

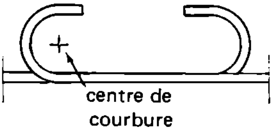
$\theta°$	30	45	60	90	120	135	150	180
α	1,23	1,37	1,52	1,87	2,31	2,57	2,85	3,51
β	0,58	0,92	1,30	2,19	3,28	3,92	4,62	6,28

usuels

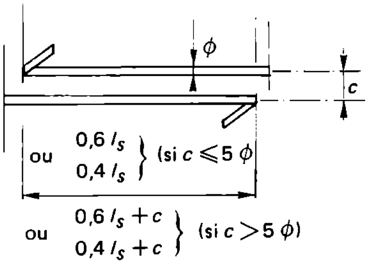
C.5.5. Recouvrement

(*A.6.1,253)

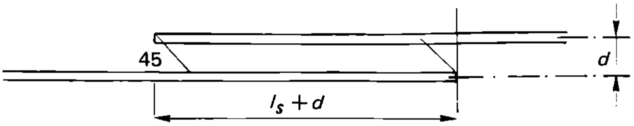
Élévation



Plan



Les recouvrements d'armatures discontinues mettent en jeu la longueur de scellement l_s :



Nota - En cas de barres droites simplement bout à bout, la section utile des m barres au total, se trouve réduite à $m - p$ barres si on rencontre p barres coupées sur une longueur l_s. Les armatures H.A. peuvent être mises en continuité par manchonnage serti sur barres mises bout à bout (voir photo page 27).

Remarque : On utilise de plus en plus des aciers H.A. FeE40 et les ancrages (ou recouvrement) sont, le plus souvent, assurés par scellement droits plutôt que par des crochets.

CHAPITRE C.6

CALCULS PRATIQUES A L'EFFORT TRANCHANT

Ces calculs ne sont à effectuer que dans le cas de l'état limite ultime.

Nous allons prendre comme exemple la poutre de 20 m de portée étudiée précédemment en flexion.

C.6.1. Calcul de l'effort tranchant ultime

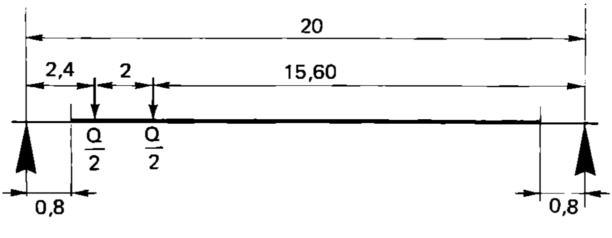
$$V_G = \frac{gl}{2} = \frac{19{,}5 \times 20}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 195{,}0 \text{ kN}$$

$$V_Q = \frac{450}{2}\left(\frac{20 + 18}{20}\right) 1{,}21 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 517{,}2 \text{ kN}$$

Combinaison fondamentale (§ A.5.4.c)

$$V_u = 1{,}35 \times 195 + 1{,}50 \times 517{,}2 = 1039 \text{ kN}.$$

Pour le calcul des armatures d'âme, il est *loisible* d'appliquer la réduction d'effort tranchant :



$$V_G = 19{,}5\left(\frac{20}{2}-\frac{1{,}60}{2}\right)= 179{,}4$$

$$V_Q = \frac{450}{2}\left(\frac{17{,}60 + 15{,}60}{20}\right) \times 1{,}21 = 452.$$

d'où V_u (réduit) $= 1{,}35 \times 179{,}4 + 1{,}50 \times 452 = 920$ kN

C.6.2. Contrainte de cisaillement du béton

Nous rappelons que pour cette poutre nous avons estimé la fissuration préjudiciable. La contrainte limite de cisaillement du béton est la plus faible des deux valeurs : (A.3.1.C)

$$0{,}10 f_{cj} = 0{,}10 \times 20 = 2 \text{ MPa ou } 3 \text{ MPa}$$

La contrainte ultime est :

$$\tau_u = \frac{V_u}{b_0 d} = \frac{1039\cdot 10^{-3}}{0{,}40 \times 1{,}46} = 1{,}78 \text{ MPa} < 2 \text{ MPa}$$

La condition est satisfaite.

C.6.3. Armatures d'âme

Nous choisissons pour une nappe deux cadres en ϕ 10 lisse Fe E 24 (f_e = 235 MPa).

$$A_t = 4\,\phi\,10 = 3{,}14 \text{ cm}^2.$$

a) Espacement dans la zone d'appui (C.3.2.)

Calcul de τ_u avec V_u réduit : $\tau_u = \dfrac{V_u}{b_0\, d}$

$$\tau_u = \frac{920\cdot 10^{-3}}{0{,}40 \times 1{,}46} = 1{,}58 \text{ MPa}$$

d'où l'espacement maximal, avec $f_{tj} = 1{,}8$ et $k = 1$ on a $0{,}3 f_{tj}\, k \simeq 0{,}5$

$$s_t \leqslant \frac{0{,}8 \times 235 \times 3{,}14}{40\,(1{,}58 - 0{,}5)} = 13{,}66 \text{ cm} \quad \text{soit } s_t = 13 \text{ cm}$$

il faut également

$$s_t \leqslant 0{,}9 \times 1{,}46 = 1{,}31 \text{ m et } s_t \leqslant 40 \text{ cm} \qquad \text{(C.3.2.a)}$$

et

$$\frac{A_t f_e}{b_0\, s_t} \geqslant 0{,}4 \text{ MPa}$$

soit :

$$\frac{3{,}14 \times 235}{40 \times 13} = 1{,}42 > 0{,}4 \text{ (satisfait).}$$

En définitive on adopte s_t = 13 cm (à l'appui).

b) Espacement dans la zone centrale

L'effort tranchant de charge permanente y est nul. L'effort tranchant de charge d'exploitation est maximum sous une roue lorsque le pont roulant est au milieu de la poutre :

$$V_Q = \frac{Q}{2} \times \delta = \frac{450}{2} \times 1{,}21 = 272{,}3 \text{ kN}$$

(δ = coefficient dynamique § B.7.2.).

$$V_u = 1{,}5 \times 272{,}3 = 409 \text{ kN}$$

$$\tau_u = \frac{409 \cdot 10^{-3}}{0{,}40 \times 1{,}46} = 0{,}7 \text{ MPa}$$

$$s_t \leqslant \frac{0{,}8 \times 235 \times 3{,}14}{40\,(0{,}7 - 0{,}5)} = 74 \text{ cm} \qquad \text{(C.3.1.)}$$

Mais on est limité par la condition minimale :

$$\frac{A_t f_e}{b_0\, s_t} \geqslant 0{,}4 \text{ MPa} \qquad \text{(C.3.2.)}$$

soit

$$s_t \leqslant \frac{3{,}14 \times 235}{40 \times 0{,}4} = 46 \text{ cm.}$$

s_t variera donc de 13 cm à l'appui à 40 cm au milieu (valeur maximale admissible C.3.2.a.).

c) Modulation des espacements

Les espacements seront répartis en différentes valeurs constantes sur une certaine longueur, par exemple ici : 13, 16, 20, 30 et 40 cm. De chaque valeur s_t on déduit l'effort tranchant maximal V_u (s_t) correspondant en écrivant :

$$s_t = \frac{0{,}8 f_e A_t}{b_0\,(\tau_u - 0{,}3 f_{tj} k)}$$

d'où

$$\tau_u - 0{,}3 f_{tj} k = \frac{0{,}8 f_e A_t}{b_0\, s_t}$$

($k = 1$ en flexion simple) d'où τ_u et, de là $V_{u\,(s_t)} = \tau_u\, b_0\, d$.

Dans le cas présent, on a :

$$\tau_u - 0{,}5 = \frac{0{,}8 f_e A_t}{b_0\, s_t} = \frac{0{,}8 \times 235 \times 3{,}14}{40\, s_t} = \frac{14{,}76}{s_t} \text{(en MPa)}$$

et $\quad V_u = \tau_u \times 0{,}40 \times 1{,}46 = 0{,}584\, \tau_u$ en MN soit $584\, \tau_u$ en kN.

on trouve :

s_t en cm	τ_u en MPa	V_u en kN
16	1,42	829
20	1,24	724
30	0,99	578
40	0,87	508

Le tracé de la courbe enveloppe de l'effort tranchant V_u varie de 920 kN à l'appui à 409 kN au milieu.

La relation précédente entre V_u et s_t permet de déterminer les zones où le s_t choisi est admissible et d'en fixer ainsi la répartition.

d) **Règle pratique de Caquot** pour la répartition des cadres (voir page 107).

C.6.4. Armatures longitudinales à l'appui

a) **Section minimale**

On doit avoir $A_s \geqslant \frac{\gamma_s V_u}{f_e}$ (2ème figure C.3.1.)

soit $$A_s \geqslant \frac{1{,}15 \times 1039 \cdot 10^{-3}\ (\text{MN})}{400} = 29{,}9 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2 \text{ soit } 29{,}9\ \text{cm}^2.$$

Si nous conservons les barres du 1er lit soit 4 ϕ 40 la section sera de 50,27 cm^2 ; elle est donc suffisante.

b) **Largeur d'appui** (C.4.)

La poutre sera appuyée sur des plaques de néoprène de largeur p régnant sur l'épaisseur de la poutre $b = 40$ cm.

Il faut $\frac{V_u}{b_0\, a} \leqslant 0{,}4 \frac{f_{cj}}{\gamma_b}$

$$f_{cj} = 20 \text{ MPa} \quad \gamma_b = 1{,}5 \quad V_u = 1039 \text{ kN} = 1{,}039 \text{ MN}$$

d'où $$a \geqslant \frac{1{,}039}{0{,}40} \times \frac{1{,}5}{20} = 0{,}19 \text{ m}$$ (voir dessin page 92)

on en déduirait $p \geqslant 19 - 2 \times 7 = 5$ cm ; c'est trop faible ; on pourra adopter des plaques 20 x 20 cm (par exemple).

c) **Ancrage - adhérence**

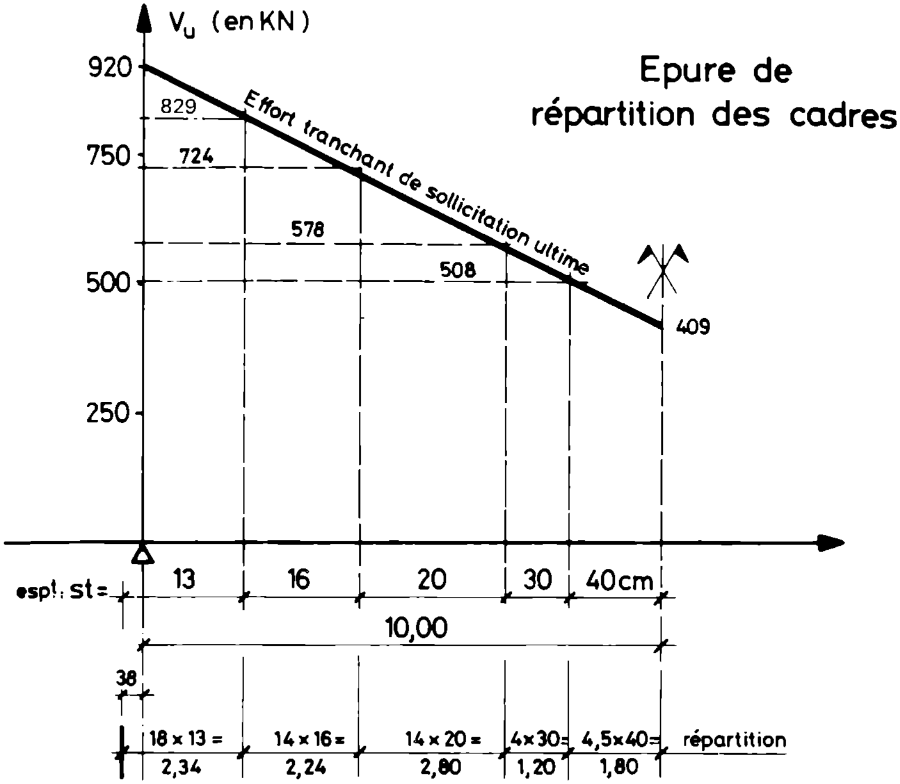
$$l_s = 40\,\phi = 40 \times 4 = 160 \text{ cm.}$$

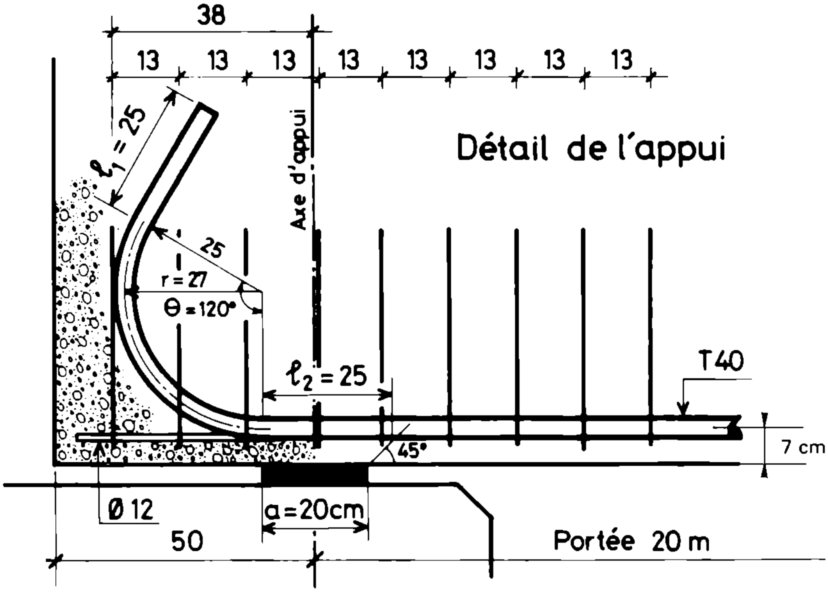
Si on adopte l'ancrage courbe ($\phi = 120°$) il faut :

$$l_2 + 2{,}3\, l_1 + 3{,}3\, r \geqslant 160 \qquad \text{(C.4.)}$$

Pour un ϕ 40, il faut $$r \geqslant \frac{500}{2} + \frac{\phi}{2} = 27 \text{ cm.}$$

Si nous prenons $l_2 = 25$ cm on aura $l_1 \geqslant \frac{160 - 3{,}3 \times 27 - 25}{2{,}3} = 20$ cm
on adopte $l_1 = 25$ cm.


Epure de répartition des cadres
Vu (en KN)
920
829
750
724
578
508
500
250
409
Effort tranchant de sollicitation ultime
esp t. st =
13
16
20
30
40cm
10,00
38
18 x 13 = 2,34
14 x 16 = 2,24
14 x 20 = 2,80
4x30= 1,20
4,5x40= 1,80
répartition


Détail de l'appui
38
13 13 13 13 13 13 13 13
ℓ1 = 25
25
r = 27
θ = 120°
Axe d'appui
ℓ2 = 25
T40
7 cm
45°
Ø 12
a = 20cm
50
Portée 20 m

CHAPITRE C.7

ARRÊTS DE BARRES

Nous venons de voir que sur les 4 ϕ 40 et 8 ϕ 32 nécessaires dans la section la plus sollicitée en flexion (zone du milieu), le lit inférieur de 4 ϕ 40 sera seul conservé à l'appui pour la reprise de la composante horizontale de la force de compression des bielles à 45°. Les deux lits supérieurs (2 x 4 ϕ 32) seront donc arrêtés avant d'arriver jusqu'à l'appui.

C.7.1. Courbe enveloppe des moments fléchissants

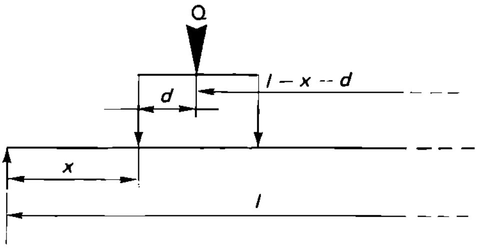
a) La courbe du moment fléchissant de poids propre (lorsqu'il est uniformément réparti) est la parabole définie par l'équation :

$$M_{G(x)} = \frac{g}{2} x (l - x)$$

b) Sous l'effet d'un groupe de charge d'exploitation $Q_1 + Q_2 = Q$ (voir théorème de Barré § A.5.8) :

Le moment se définit par l'équation :

$$M_{Q(x)} = \frac{Q_x (l - x - d)}{l}$$



Ceci permet de tracer la courbe enveloppe :

$$M_{(x)u} = \gamma_G \, M_{G(x)} + \gamma_Q \, M_{Q(x)}.$$

C.7.2. Moments résistants ultimes

Si l'on réduit la section d'armature totale A_s à la valeur A_{sr} le moment résistant ultime se réduit à la valeur :

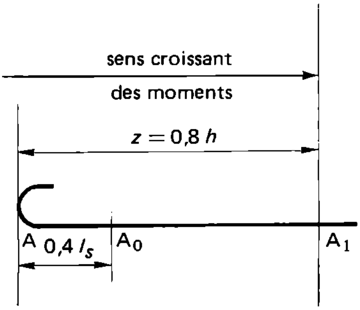
$$M_{ru} = A_{sr} \times \frac{f_e}{\gamma_s} \times z$$

Le point d'arrêt théorique des barres correspondant à la réduction de A_s à A_{sr} se situera donc à partir du point où l'on aura :

$$M_x \leqslant M_{ru}.$$

Toutefois, il convient de remarquer que le principe de transmission de la force de compression F_b de la membrure supérieure aux aciers inférieurs se fait, en principe, par bielles inclinées à 45° (en cas de fissuration par effort tranchant) ; ceci conduit à considérer que lorsqu'on calcule la traction dans ces aciers dans une section A on doit prendre en compte le moment qui se manifeste dans la section A_1 à la distance z ; le réglement s'exprime ainsi :

«*A.4.1,5. Sollicitation des membrures tendues* : pour évaluer l'effort agissant sur une membrure tendue, on prend en compte le moment fléchissant agissant à une distance 0,8 h de la section considérée, dans la direction où le moment augmente en valeur absolue. La force de traction possible dans la barre diminue progressivement le long de la longueur d'ancrage A_0A (= 0,4 l_s dans ce cas) et s'annule en A ; dans ce cas $l_s = 40\,\phi = 40 \times 3{,}2 = 128$ cm et 0,4 $l_s = 52$ cm.



C.7.3. Exemple de calcul pratique :

Nous reprenons la poutre de pont roulant de 20 m de portée ; dans la zone médiane la section comporte une section d'acier $A_s = 4\,\phi\,40 + 8\,\phi\,32$ (114,6 cm²) et présente une hauteur utile d = 146 cm. A l'état limite ultime y = 56 cm, on a donc :

$$z = 129{,}6 \text{ (page 72)}.$$

a) Tracé du diagramme enveloppe du moment fléchissant :

On a : $$M_{(x)} = \gamma_G\left[\frac{g}{2}x\,(l - x)\right] + \gamma_Q\left[Qx\,\frac{(l - x - d)}{l}\right]$$

Nous adopterons comme dans les calculs précédents

$$\gamma_G = 1{,}35 \ \text{ et } \ \gamma_Q = 1{,}50$$

or $g = 19{,}5$ kN/m.c[t] et $Q = 450 \times 1{,}21 = 545$ kN

d'ou $$M_x = 1{,}35\left[\frac{19{,}5}{2} \times x\,(20 - x)\right] + 1{,}50\left[\frac{545\,x\,(20 - x - 1)}{20}\right]$$

$$M_{(x)} = x\,(1040 - 54\,x)\ (*)$$

$x = 2$ m	$M_x = 1864$ kN.m
$x = 4$ m	$M_x = 3296$ kN.m
$x = 6$ m	$M_x = 4296$ kN.m
$x = 8$ m	$M_x = 4864$ kN.m
$x = 10$ m	$M_x = 5000$ kN.m

On avait trouvé comme valeur maximale 4991 kN.m (la légère différence est dûe à ce que la formule précédente (*) a été légèrement arrondie.

Le diagramme correspondant a été tracé sur la figure ci-après.

b) Calcul des moments résistants ultimes réduits M_{ru}

$$M_{ru} = A_{sr} \times \frac{f_e}{\gamma_s} \times z$$

$z = 129{,}6$ cm $= 1{,}296$ m (B.7.3.d.)

A_{sr} = section réduite d'armatures

$$\frac{f_e}{\gamma_s} = \frac{400}{1{,}15} = 347{,}8 \text{ MPa}$$

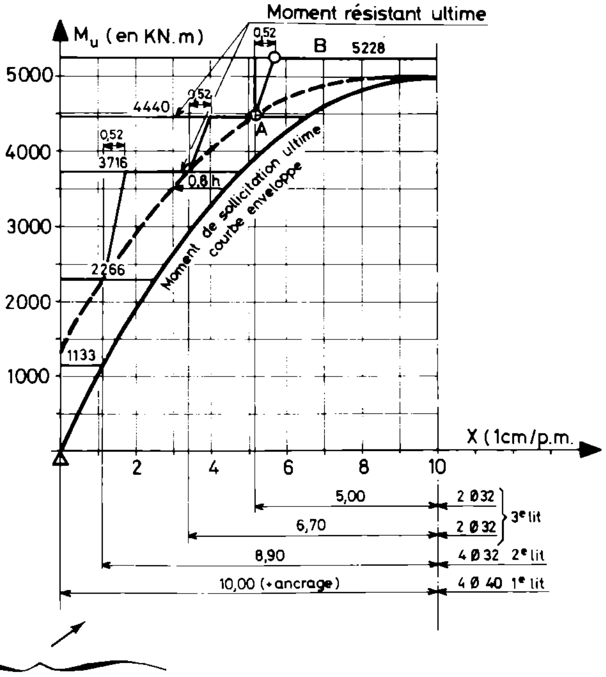
d'où $$M_{ru} = A_{sr}\ (\text{en mm}^2) \times 450{,}7 \cdot 10^{-3} \text{ kN.m}$$

Sections réduites		M_{ru} en kN.m
Composition	A_{sr} en mm²	
4 ϕ40 + 6 ϕ32	9852	4440
4 ϕ40 + 4 ϕ32	8244	3716
4 ϕ40	5027	2266
2 ϕ40	2513	1133

Sur la figure ci-après on a décalé de $z = 0{,}8\,h$ (vers la gauche) la courbe enveloppe des moments d'actions ultimes et on a tracé les paliers horizontaux limitant les moments résistants ultimes aux valeurs correspondant aux suppressions de lits d'armatures. Il convient que le diagramme des moments résistants reste au-dessus et ne coupe pas le diagramme des moments d'actions.

Remarquons que le passage d'un moment résistant à un autre plus élevé se fait progressivement sur la longueur d'ancrage du lit ajouté soit 0,52 m. On obtient donc le diagramme-enveloppe des moments résistants en partant, par exemple, du point

A (point d'intersection du moment résistant 4440 avec la courbe-enveloppe décalée de $z = 0{,}8\ h$) et en le joignant au point B décalé de 0,52 m (longueur d'ancrage) vers la droite (*). On obtient ainsi la courbe-enveloppe des moments résistants qui doit «envelopper» la courbe-enveloppe des moments sollicitants (décalée de 0,8 h).



Les longueurs indiquées sont les longueurs totales nécessaires (crochets d'ancrage compris) ; il a été tenu compte, en effet, du décalage 0,8 h et de l'intervention progressive du lit supérieur le long de la longueur d'ancrage 0,52 m. Les barres ayant en principe une longueur maximale de 18 m des recouvrements devront être prévus (avec un décalage sur les différentes barres) pour les 1er et 2ème lits.

d) Règle pratique de Caquot pour la répartition des cadres

Elle consiste à prendre pour écartement des armatures transversales, dans le cas d'une poutre supportant *une charge uniformément répartie*, la suite des nombres :

7, 8, 9, 11, 13, 16, 20, 25, 30, 40 (maximum BAEL *A.5.1,22).

Le premier nombre à retenir correspond à l'écartement à l'appui et on repète ensuite chacun des intervalles indiqués ci-dessus autant de fois qu'il y a de mètres dans la demi-portée. Les cadres seront disposés symétriquement par rapport au milieu de la poutre.

(*) Pour les ϕ 32 la longueur d'ancrage est en effet, avec crochet, 0,4 l_s avec $l_s = 40\ \phi$, soit ici :

$$0{,}4\ (40 \times 3{,}2) \simeq 52 \text{ cm.}$$

Dans le cas présent, (si la charge d'exploitation était uniformément répartie) le premier intervalle doit être de 13 cm ; on devrait donc, en principe, prévoir à partir de l'appui 10 espacements de 13 cm puis 10 de 16 cm puis, 10 de 20 cm puis, 10 de 25 cm etc... mais il faut respecter la symétrie par rapport au milieu de la poutre ; on pourra adopter par exemple, à partir de l'axe d'appuis :

10 intervalles de 13 cm	1,30 m
10 intervalles de 16 cm	1,60 m
10 intervalles de 20 cm	2,00 m
10 intervalles de 25 cm	2,50 m
8 intervalles de 30 cm	2,40 m
1/2 intervalle de 40 cm	0,20 m
1/2 portée	10,00 m

MODULE D - DESSINS D'EXÉCUTION

Tous les calculs qui précèdent ont pour but de fixer sur des dessins tous les détails qui permettront d'exécuter la construction de l'ouvrage conformément aux dispositions auxquelles ont conduit les calculs.

Les parties où le ferraillage est particulièrement dense devront être dessinées en détail à grande échelle (ferraillage en fond de poutre, par exemple) et le projeteur devra s'assurer des possibilités d'un bétonnage correct ; en particulier, les distances entre armatures elles-mêmes et entre armatures et coffrage, devront être cotées clairement et conformément aux prescriptions du chapitre A.6. précédent.

Il conviendrait également que le projeteur indique sur les dessins d'exécution la dimension maximale Cg du gravier à utiliser en appliquant les règles usuelles ; le règlement prévoit : (*A.7.2,6)

$$rg \geqslant \frac{Cg}{1,4} \text{ (granulats roulés)}$$

et

$$rg \geqslant \frac{Cg}{1,2} \text{ (granulats concassés)}$$

rg est le rayon moyen des plus petites mailles du ferraillage.

Dans le cas de la poutre étudiée, la distance libre minimale entre les cadres est $a = 12$ cm et l'espacement minimal (horizontal) entre les armatures est $b = 6$ cm.

$$rg = \frac{ab}{2\,(a+b)} = \frac{12 \times 6}{2\,(12+6)} = 2 \text{ cm}$$

d'où $Cg = 2 \times 1,4 = 2,8$ cm (roulés)

$2 \times 1,2 = 2,4$ cm (concassés).

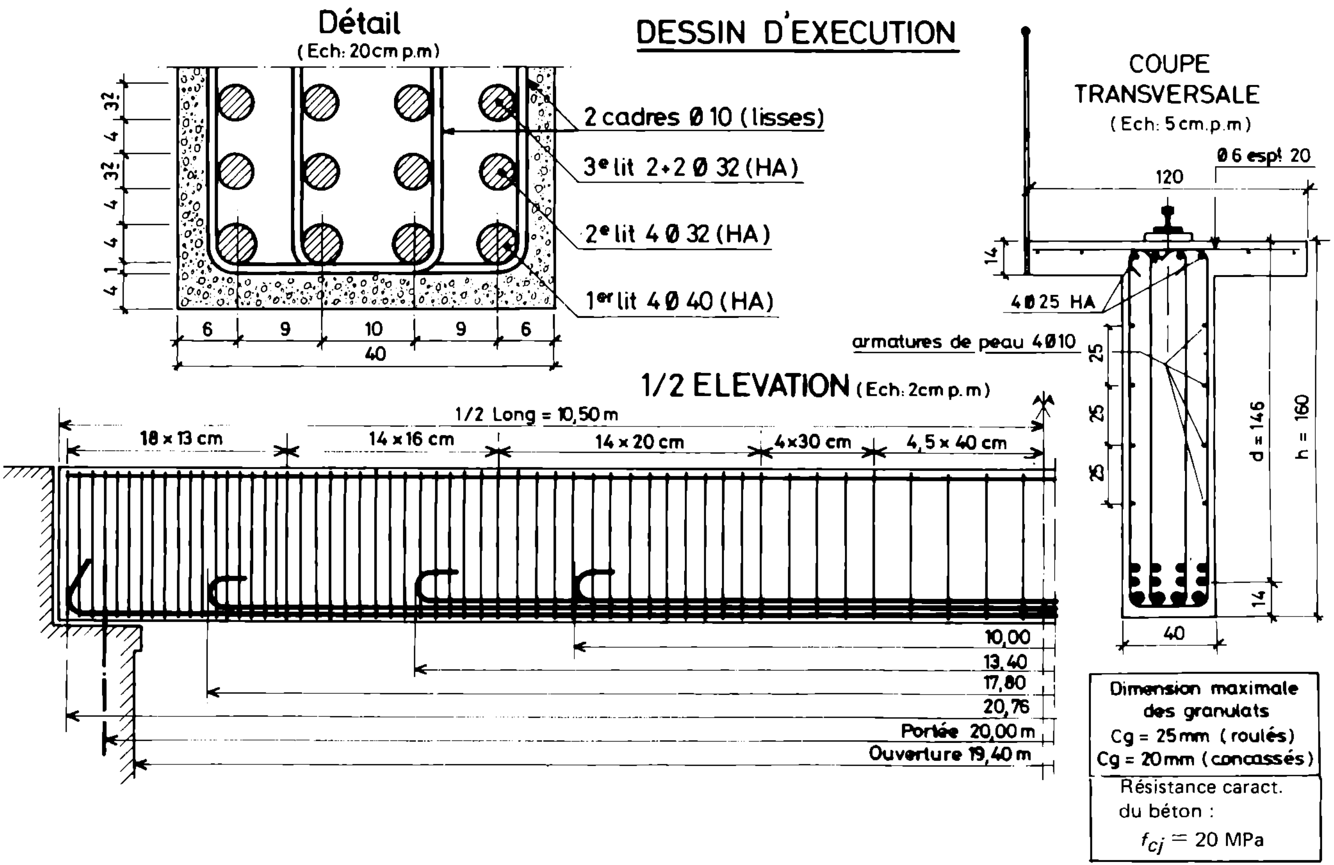
On pourra indiquer sur le dessin :

Dimension maximal des granulats (en adoptant des dimensions normalisées) :

$Cg = 25$ mm (roulés)

$Cg = 20$ mm (concassés)

DESSIN D'EXECUTION



MODULE E - TRACTION SIMPLE

CHAPITRE E.1

DÉFINITION

Les structures en béton armé sont assez rarement sollicitées en *traction simple*. En effet, cette sollicitation se présente à peu près uniquement dans les tirants, mais souvent le poids propre du tirant, s'il est de quelque importance, engendre un moment fléchissant qui se combine avec l'effort normal de traction et engendre une sollicitation en «flexion composée» que nous étudierons ultérieurement.

Par contre, dans une suspente ou un tirant vertical ne se produit que de la traction simple sous réserve que l'axe de l'effort de traction passe par le centre de gravité de la section sinon l'excentrement engendrerait un moment fléchissant.

CHAPITRE E.2

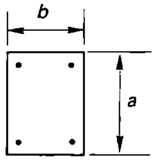
DISPOSITIONS PARTICULIÈRES ET PRINCIPE DE CALCULS

Conformément aux hypothèses faites (§ A.2.) on suppose que le béton ne présente *aucune résistance à la traction* ; l'effort de traction N ne pourra donc être repris que par les armatures dont la section totale est A_s avec une contrainte σ_s ne dépassant pas les contraintes limites ultimes fixées au paragraphe A.3.2.f.

On disposera des armatures transversales destinées seulement à maintenir à leur place les armatures longitudinales ; la règle est de prendre pour ces armatures un diamètre assez faible 6 ou 8 mm et leur espacement est au plus égal à 40 cm ou à la plus petite dimension de la pièce augmentée de 10 cm.

On vérifie, de plus, la condition de non fragilité. Cette condition s'écrit :

$$B f_t \leqslant A_s f_e$$



B section du tirant = B = $a \times b$

f_t résistance caractéristique de rupture en traction = $0{,}6 + 0{,}06 f_c$

A_s section totale des armatures tendues

f_e limite élastique des armatures.

La sollicitation d'effort normal N à prendre en compte dans les calculs sera évaluée par application des combinaisons d'action indiquées aux paragraphes A.5.4.c et d.

CHAPITRE E.3

CALCUL PRATIQUE EN TRACTION SIMPLE

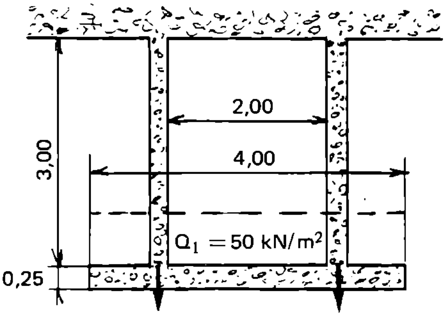
Nous allons traiter, à titre d'exemple, une dalle rectangulaire 4 x 2 m et de 0 25 m d'épaisseur suspendue à une grosse dalle plafond en béton armé par quatre tirants de section carrée 20 x 20 cm, de 3 m de hauteur ; la dalle ainsi suspendue peut avoir à supporter un stockage de matériaux lourds à raison de 50 kN/m².

Nota - La flexion de la dalle est supposée négligeable et n'introduisant, par conséquent, aucun moment de flexion dans les tirants verticaux.

a) État limite ultime :

Charge permanente :

4 x 2 x 0,25	= 2,000 m^3
4 x 0,20 x 0,20 x 3,00	= 0,480 m^3
	2,480 m^3



G par poteau : $\frac{1}{4}$ x 2,480 x 25 (kN/m³) = 15,50 kN

(défavorable donc G_{max})

Q_1 (action de base) par poteau : $\frac{1}{4}$ x 2 x 4 x 50 = 100 kN.

La sollicitation ultime est (avec γ_{Q1} = 1,50 et γ_{Gmax} = 1,35)

$$N_u = 1{,}35 \times 15{,}5 + 1{,}5 \times 100 \simeq 171 \text{ kN} = 171\ 10^{-3} \text{ MN}$$

On adopte des aciers Fe E 24 $\left(\frac{f_e}{\gamma_s} = \frac{f_e}{1{,}15} = \frac{235}{1{,}15} = 204 \text{ MPa}\right)$

La section minimale d'armatures (par poteau) A_s (en cm^2) est donc telle que :

$$A_s\ 10^{-4} \times 204 \geqslant 171 \cdot 10^{-3} \quad A_s \geqslant \frac{171 \cdot 10^{-3}}{204}\ m^2$$

$$A_s \geqslant \frac{171}{20,4} = 8,38\ cm^2$$

b) État limite de service

Si l'on suppose que la fissuration est très préjudiciable (ambiance agressive) il convient de faire le calcul à l'État limite de service en adoptant comme contrainte limite dans les aciers la valeur :

$$\bar{\sigma}_s \leqslant \begin{cases} 0,5 \times 235 = 117\ MPa \\ \text{ou}\ \ 110\ MPa \end{cases}$$

La sollicitation à l'état limite de service est (par poteau) :

$$15,5 + 100 = 115,5\ kN.$$

Il faudra donc : $A_s \geqslant \frac{115,5}{11,0} = 10,5\ cm^2$.

L'armature doit être disposée symétriquement et avec au moins une barre dans chaque angle, on adoptera :

$$2\ \phi\ 14 + 4\ \phi\ 16 = 11,12\ cm^2$$

c) Armatures transversales

On adoptera des cadres en ϕ 6 mm il faut $\phi_t \leqslant 0,33\ \phi_l$ (F2.2)

s_t = espacement : $\leqslant$
- 40 cm
- ou 20 + 10 = 30 cm (petit côté + 10 cm)
- règle adoptée par analogie avec la compression.

On adoptera $s_t = 30$ cm

d) Scellement des armatures

Longueur de scellement droit :

$$l_s = 50\ \phi = 50 \times 1,6 = 80\ cm$$

On adopte un ancrage retourné à 90° avec :

$$r = 3\ \phi = 3 \times 1,6 = 4,8\ cm$$

(pour les aciers lisses Fe E 24, le diamètre du mandrin de pliage = 5 ϕ = 8 cm) avec $\theta = 90°$ on a (§ C.5.4.).

$$l_2 + 1,87\ l_1 + 2,19\ r \geqslant l_s$$

soit $l_2 = 20$ cm $\quad r = 4,8$

il faut $l_1 \geqslant \frac{80 - 20 - 2,19 \times 4,8}{1,87} = 26,5$ cm

On adopte $l_1 = 30$ cm.

e) Condition de non fragilité

Admettons pour résistance caractéristique en traction f_t = 1,8 MPa correspondant à un béton de résistance courante, on doit vérifier :

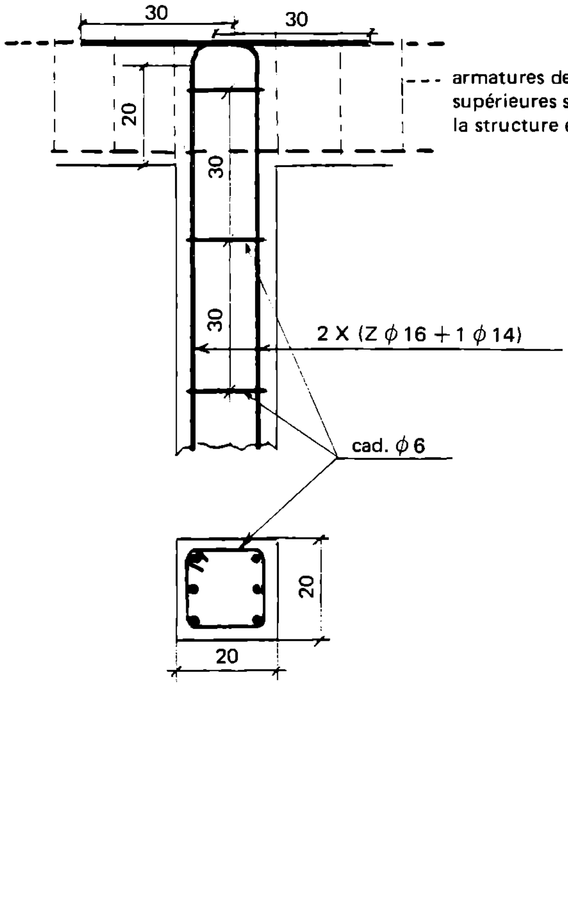
$$B \times f_t \leqslant A_s \times f_e$$

$$0{,}20 \times 0{,}20 \times 1{,}8 \leqslant 11{,}12 \times 10^{-4} \times 235$$

$$720 \times 10^{-4} \leqslant 2613 \times 10^{-4}$$

Condition vérifiée

f) Disposion du ferraillage

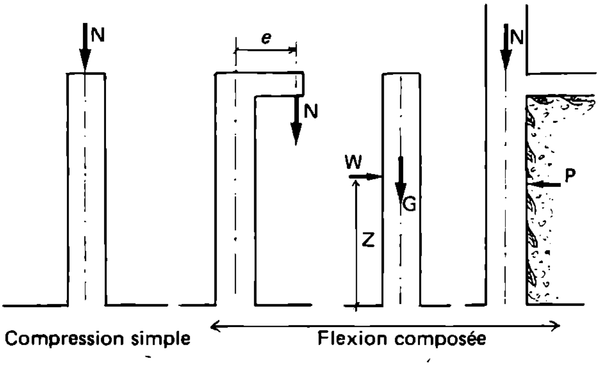


MODULE F - COMPRESSION SIMPLE
CAS DES POTEAUX EN COMPRESSION CENTRÉE

CHAPITRE F.1

DÉFINITION

Une pièce comme un poteau par exemple, est en état de compression simple quand elle n'est soumise qu'à un effort de compression *normal* N appliqué au centre de gravité de la section à l'exclusion de tout moment fléchissant qui pourrait être engendré soit par une action extérieure (vent W ou poussée de terre P par exemple) soit par un excentrement «*e*» de l'effort normal en question ; dans ce cas, la pièce travaille en flexion, en même temps qu'en compression ; il s'agit alors de flexion composée que nous étudierons ultérieurement.



On admettra toutefois qu'un poteau est soumis à une «*compression centrée*» s'il n'est sollicité (en plus de l'effort normal de compression N) que par des moments faibles dont l'existence n'est pas prise en compte dans la justification de stabilité et de résistance des éléments qui lui sont liés et qui ne conduisent d'ailleurs qu'à de petites excentricités de l'effort normal N. Dans ce cas les *coefficients* utilisés (dans ce chapitre) prennent en compte la majoration de sécurité nécessaire correspondante (Art. B8.2.10 du BAEL).

CHAPITRE F.2

(*A.8.1,2)

DISPOSITION DES ARMATURES

F.2.1. Armatures longitudinales :

Elles sont disposées parallèlement à la direction de l'effort normal au voisinage des parois en respectant les distances minimales d'enrobage indiquées au paragraphe A.6.1. ; leur section doit être d'au moins 4 cm^2 par mètre de parement mesuré perpendiculairement à leur direction; leur section totale A_s doit être d'au moins 0,2 % sans dépasser 5 % de la section totale de béton.

Dans une section rectangulaire la distance entre les armatures longitudinales ne doit pas dépasser 40 cm ou le plus petit côté augmenté de 10 cm et une armature doit être prévue dans chaque angle.

Dans les sections polygonales il faut prévoir une armature dans chaque angle.

Dans les sections circulaires il faut prévoir au moins 6 armatures (à 60° l'une de l'autre (ou mieux 8 à 45°).

F.2.2. Armatures transversales : (*A.8.1,3)

Leur diamètre est d'environ le 1/3 de celui des armatures longitudinales. Leur espacement est au maximum :

- 15 fois le diamètre des armatures longitudinales ou 40 cm
- ou la plus petite dimension de la pièce augmentée de 10 cm.

(*B.8.2,1)

CHAPITRE F.3

ACTIONS ET COMBINAISONS

On retrouve les mêmes actions que pour les poutres en flexion, et les quatre combinaisons les plus courantes sont les suivantes pour le calcul à l'état limite ultime :

G = charge permanente

Q = charge d'exploitation

W = vent (consulter les Règles Neige-Vent en ce qui concerne la compatibilité de simultanéité de la neige et du vent) :

1,35 G + 1,5 Q (cas général courant)

1,35 G + 1,5 Q + 1,2 W

1,35 G + 1,5 W + Q

G + 1,5 W (équilibre statique en particulier)

sur la terrasse d'un immeuble Q_B peut représenter soit la charge d'exploitation soit la neige.

Dans le cas des bâtiments on pourra évaluer les charges verticales en ne tenant pas compte de la continuité des travées mais les charges ainsi calculées seront majorées dans les conditions suivantes : (*B.8.1,1)

- Bâtiments à deux travées :
  + 15 % sur les poteaux centraux
- Bâtiments à trois travées ou plus :
  + 10 % sur les poteaux voisins des poteaux de rive.

Si le calcul à l'*état limite de service* est demandé*, la combinaison d'action à considérer est G + Q (sauf prescription spéciale pour la prise en compte de l'action du vent et de la neige).

* En principe seul le calcul à l'état limite ultime est demandé.

(*B.8,3)

CHAPITRE F.4

FLAMBEMENT

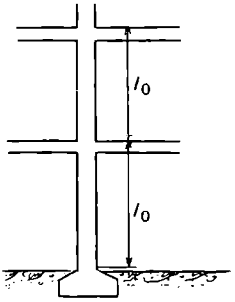
F.4.1. Définition et sollicitations

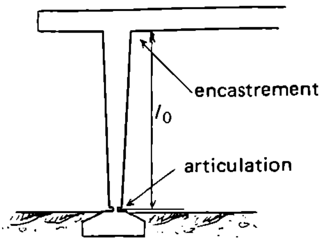
Même si une pièce travaille théoriquement en compression simple, elle pourra, si elle présente une certaine longueur, être sujette à une instabilité tranversale dite «de flambement» ; c'est le phénomène bien connu de la courbure que prend une règle plate et longue sur laquelle on exerce un effort de compression dans son sens longitudinal.

Ce phénomène majore évidemment les contraintes et compromet la résistance de la pièce. Des théories ont été établies explicitant ce phénomène et des méthodes de calcul permettent aujourd'hui de l'appréhender avec une bonne précision. Ces méthodes présentent toutefois une certaine complexité et, dans les cas courants où la longueur dite «de flambement» l_f ne dépasse pas une certaine valeur (voir à la suite), on peut assurer la sécurité au flambement en adoptant des *réductions de contraintes* par application des règles qui suivent.

F.4.2. Longueur de flambement l_f :

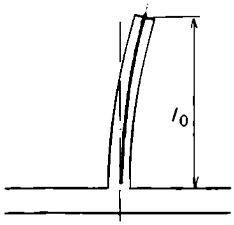
Elle est évaluée en fonction de la longueur libre l_0, des pièces et de leurs liaisons effectives (dans le cas des bâtiments à étages multiples, la longueur l_0 est comptée entre surfaces de planchers) :

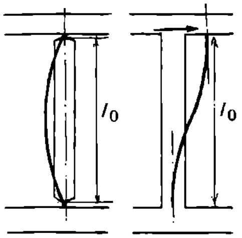




Selon les cas prédisposant plus ou moins au flambement, la longueur de flambement l_f pourra être calculée, à partir de l_0, suivant les règles ci-après :

Pièce libre à une extrémité et encastrée à l'autre : (exemple : un mât) $l_f = 2\, l_0$.



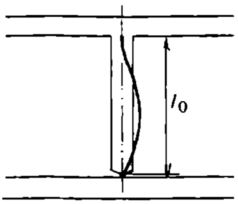


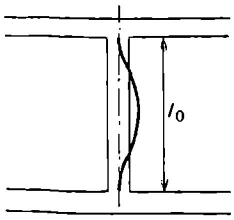
Pièce articulée à ses deux extrémités ou encastrée à ses deux extrémités dans le cas où celles-ci peuvent se déplacer l'une par rapport à l'autre dans le sens où on étudie le flambement :

$$l_f = l_0$$

Pièce articulée à une extrémité et encastrée à l'autre :

$$l_f = \frac{l_0}{\sqrt{2}} \simeq 0,7\, l_0$$





Pièce encastrée à ses deux extrémités mais empêchée de se déplacer l'une par rapport à l'autre :

$$l_f = \frac{l_0}{2}.$$

Pour les bâtiments à étages qui sont en général contreventés par des murs et cloisons qui assurent leur stabilité transversale, on pourra adopter forfaitairement :

soit $l_f = 0{,}7\ l_0$ si le poteau est encastré dans un massif de fondations ou assemblé de part et d'autre à des poutres de plancher de même raideur que lui

soit $l_f = l_0$ dans les autres cas (poteau d'angle par exemple).

F.4.3. Élancement (*A.4.3,5)

A partir de la longueur de flambement l_f, on détermine le coefficient *d'élancement* λ :

$$\lambda = \frac{l_f}{i}$$

i est le rayon de giration de la section de béton seul ; I est calculé dans le plan de flambement le plus défavorable :

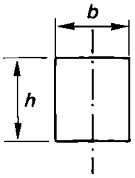
$$i = \sqrt{\frac{I}{B}}$$

I = moment d'inertie

B = aire de la section «brute» de béton.

Le plan de flambement le plus défavorable est celui qui est orienté suivant l'inertie la plus faible.

Cas d'une section rectangulaire (ou carrée)



On a $I = \frac{hb^3}{12}$ et $B = bh$ $(b < h)$

d'où $i = \frac{b}{2\sqrt{3}}$

Cas d'une section circulaire de diamètre D :

On a $I = \frac{\pi R^4}{4}$ et $B = \pi R^2$ d'où $i = \frac{R}{2}$

Nota - au sujet de la longueur de flambement l_f, l'art. A.4.3.5* précise que : ... il convient de l'évaluer avec prudence en raison des graves dangers que pourrait entraîner une sous-évaluation de cette valeur ; il faut en particulier tenir compte de la plus ou moins grande souplesse des encastrements (rarement parfaits) ainsi que des possibilités (fréquentes) de déplacements des extrémités perpendiculairement à l'axe longitudinal de la pièce.

Nous conseillons donc de n'appliquer les règles du paragraphe B.8.3.2.* des Règles BAEL (voir note paragraphe F4.2 page 121) qu'avec le souci de ne pas sous-évaluer cette longueur de flambement l_f.

CHAPITRE F.5 (*B.8.4,1)

PRINCIPE DE CALCUL

La combinaison d'action à l'état ultime permet de déterminer la sollicitation normale N_u.

On considérera que cette sollicitation doit rester inférieure à la valeur suivante (capacité de résistance ultime du poteau) :

$$N_u \leqslant \alpha \left[\underbrace{\frac{B_r f_{c28}}{0{,}9\,\gamma_b}}_{\text{Résistance du béton}} + \underbrace{A_s \frac{f_e}{\gamma_s}}_{\text{Résistance des armatures}} \right]$$

B_r aire de la section de béton réduite de 1 cm sur tout son pourtour ou de $\frac{l}{500}$ si $l > 500$ cm (défaut de coffrage)

A_s section des armatures longitudinales

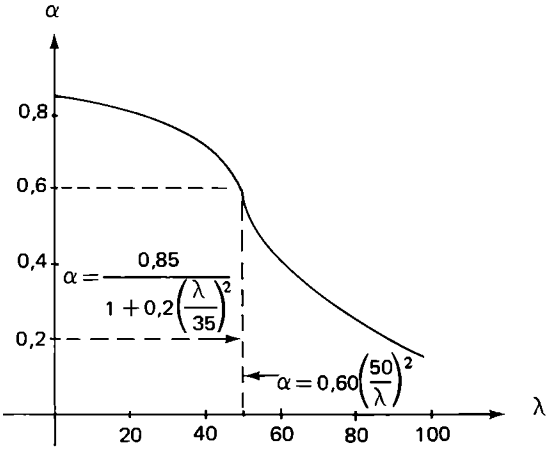
$\gamma_b = 1{,}5 \qquad \gamma_s = 1{,}15$ (valeurs habituelles)

α est le coefficient de sécurité au flambement ; il est pris égal aux valeurs suivantes :

$$\alpha = \frac{0{,}85}{1 + 0{,}2\left(\frac{\lambda}{35}\right)^2} \qquad \text{pour} \quad \lambda \leqslant 50$$

$$\alpha = 0{,}60 \times \left(\frac{50}{\lambda}\right)^2 \qquad \text{pour} \quad 50 < \lambda \leqslant 100$$

REMARQUE : La valeur de α (coefficient minorant la résistance du poteau) est assez rapidement décroissante lorsque l'élancement λ dépasse 50 ; on aura donc intérêt à ne pas dépasser l'élancement $\lambda = 50$.



Si $\lambda > 35$ on ne peut tenir compte dans la section A_s que des armatures qui contribuent le plus efficacement à la rigidité du poteau pour sa résistance au flambement (dans une section rectangulaire ce seront les armatures placées au voisinage des grands côtés, la possibilité de flambement se présentant suivant la plus faible inertie et pour les sections carrées, ce sont les aciers disposés dans les angles). Si plus de la moitié des charges est appliquée à un âge j du béton inférieur à 90 jours, la déformation de fluage ne sera que très partiellement effectuée et il y aura lieu d'appliquer une minoration aux valeurs de α : si $28 < j < 90$ j on divise α par 1,10 et si $j < 28$ on prend en compte f_{cj} au lieu de f_{c28} et on divise α par 1,20.

Si le calcul à *l'état limite de service est demandé*, l'effort normal est $N_s = G + Q$ et l'on calculera la contrainte de service du béton en compression :

$$\sigma_b = \frac{N_s}{B_r + 15\,A_s} \qquad B_r = \text{aire réduite}$$

15 est le coefficient d'équivalence n.

$n = \dfrac{E_s}{E_b}$ a déjà été défini au paragraphe B.3.1.

La contrainte limite de service est $\overline{\sigma_{bc}} = 0{,}60\, f_{c28}$, il faut $\sigma_b \leqslant \alpha\, \overline{\sigma_{bc}}$

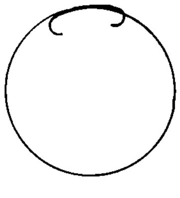
Nota - Si $\lambda > 50$ cette méthode forfaitaire conduit à des sections d'acier *très* surabondantes (car α devient très faible) par rapport à des méthodes plus élaborées et plus précises comme les tables de Faessel par exemple.

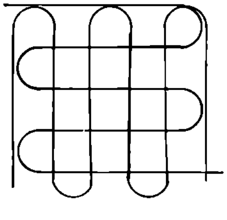
CHAPITRE F.6

FRETTAGE

Dans le cas où une pièce subit une forte compression localisée sur une faible surface (par exemple, zones d'appui sous articulations ou sous blocs d'ancrage des câbles de précontrainte) il se produit un effet de «poinçonnement» qui engendre des contraintes de traction transversales ayant tendance à fissurer ou même à éclater la pièce transversalement ; il convient alors de disposer un réseau d'armatures transversales s'opposant à l'ouverture de ces fissures ; ces armatures sont appelées «frettes» et elles constituent le «frettage».

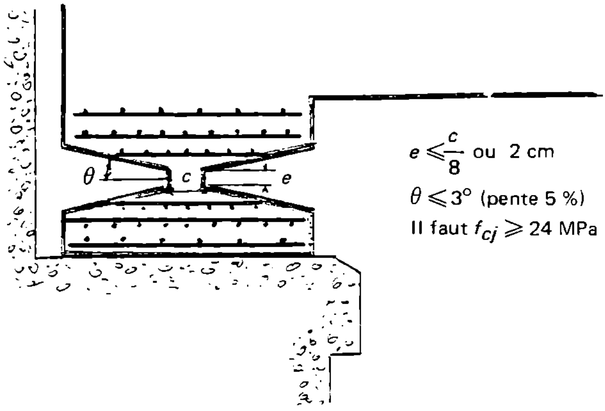
Elles sont, en général, disposées en forme de cerces fermées ou d'hélices circulaires continues ou encore de nappes superposées quadrillées.





Pour le dimensionnement et les dispositions détaillées à adopter pour ces frettes, on se reportera à l'article A.8.3. des Règles B.A.E.L. «pressions localisées, frettage, articulations».

Le frettage est également utilisé pour augmenter la résistance du béton aux chocs ; par exemple, dans les têtes de pieux enfoncés par battage, on dispose sur une certaine longueur, des cadres et étriers croisés en nappes successives faiblement espacées.



Frettage d'une articulation en béton type Freyssinet.

A l'état limite ultime, la contrainte moyenne du noyau est au plus égale à $3f_{cj}$. Cette contrainte peut paraître trop élevée mais elle est possible par suite de la très faible épaisseur de la languette constituant l'articulation et surtout de l'effet de frettage des blocs supérieurs et inférieurs.

Le frettage est souvent constitué de quadrillage et dans ce cas le volume relatif est dans chaque sens de 1 %.

CHAPITRE F.7

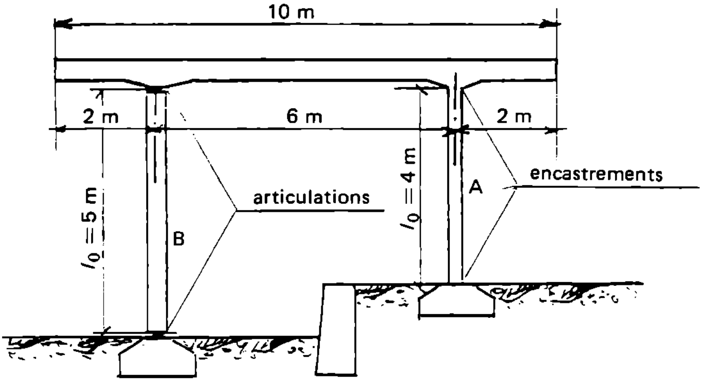
CAS DES POTEAUX EN COMPRESSION CENTRÉE

F.7.1. Exemple de poteaux encastrés ou articulés

Considérons une structure composée d'un plancher consitué par une dalle de 0,40 d'épaisseur reposant sur deux séries de poteaux (A et B) de *section carrée.*

Dans la série A les poteaux ont 4 m de hauteur et sont encastrés aux deux extrémités ;

Dans la série B les poteaux ont 5 m de hauteur et sont articulés aux deux extrémités ; la distance entre les poteaux d'une même série est de 4 m. La structure est supposée bien contreventée et ne pouvant se déplacer (ni transversalement ni longitudinalement).



La charge d'exploitation est un stockage de matériaux lourds à raison de 2 t/m^2.

Le béton utilisé est de la classe courante f_{c28} = 20 MPa et les armatures longitudinales sont des H.A. Fe E 40 (f_e = 400 MPa).

a) **Charge permanente** :

On a par poteau :

$$G = \frac{10}{2} \times 4 \times 0{,}40 \times 25\ (\mathrm{kN/m^3}) = 200\ \mathrm{kN}$$

(on néglige le poids propre du poteau)

b) **Charge d'exploitation** :

$$Q = \frac{10}{2} \times 4 \times 20\ (\mathrm{kN/m^2}) = 400\ \mathrm{kN}$$

c) **Sollicitation normale ultime**

$$N_u = 1{,}35\ G + 1{,}5\ Q_B$$

$$N_u = 1{,}35 \times 200 + 1{,}5 \times 400 = 870\ \mathrm{kN}$$

Soit $N_u = 870\ 10^{-3}$ MN.

F.7.2. Prédimensionnement de la section

On a intérêt, dans toute la mesure du possible, à avoir un élancement $\lambda \leqslant 50$ de façon à ne pas trop minorer le coefficient α, les faibles sections de béton conduisant, par ailleurs, à augmenter les section d'armatures ce qui n'est pas économique.

On a $\lambda = \frac{l_f}{i}$ $\qquad i \geqslant \frac{l_f}{50}$ si l'on veut $\lambda \leqslant 50$

l_f : longueur de flambement

série A (encastrée) $l_f = \frac{l_0}{2} = \frac{4\ \mathrm{m}}{2} = 2\ \mathrm{m}$

série B (articulée) $l_f = l_0 = 5$ m.

Si b est le côté de la section carrée du poteau :

on a $i = \frac{b}{2\sqrt{3}}$ d'où $\frac{b}{2\sqrt{3}} \geqslant \frac{l_f}{50}$

$b \geqslant \frac{l_f}{14{,}4}$

Série A (encastrée) $b \geqslant \frac{200}{14{,}4} = 13{,}9$ cm

Série B (articulée) $b \geqslant \frac{500}{14{,}4} = 34{,}7$ cm

Compte tenu que les sections de calcul sont diminuées de 1 cm sur chaque face, on adoptera, en cotes rondes :

$b = 20$ cm pour la série A

et $b = 40$ cm pour la série B

$$i = \frac{b}{2\sqrt{3}} = \longrightarrow \begin{cases} \text{série A} : \dfrac{20}{2\sqrt{3}} = 5{,}8 \text{ cm} \\ \text{série B} : \dfrac{40}{2\sqrt{3}} = 11{,}6 \text{ cm} \end{cases}$$

d'où $\lambda = \frac{l_f}{i}$ $\begin{cases} \text{série A} : & \lambda = \dfrac{200}{5{,}8} = 34{,}5 < 50 \\ \text{série B} : & \lambda = \dfrac{500}{11{,}6} = 43{,}1 < 50 \end{cases}$

$$\alpha = \frac{0{,}85}{1 + 0{,}2\left(\dfrac{\lambda}{35}\right)^2} \quad \begin{cases} \text{série A} : & \alpha = 0{,}71 \\ \text{série B} : & \alpha = 0{,}65 \end{cases}$$

F.7.3. Armatures longitudinales

La condition de résistance à l'état limite ultime est :

$$N_u \leqslant \alpha\left(\frac{B_r f_{c28}}{0{,}9\,\gamma_b} + A_s \frac{f_e}{\gamma_s}\right)$$

Série A (4 m encastrée) : $B_r = (20 - 2)^2 = 324 \text{ cm}^2 = 324\ 10^{-4} \text{ m}^2$

$$870\ 10^{-3} \leqslant 0{,}71\left(\frac{324 \times 10^{-4} \times 20}{0{,}9 \times 1{,}5} + A_s\ 10^{-4}\,\frac{400}{1{,}15}\right)$$

d'où A_s en $\text{cm}^2 \geqslant 21{,}9 \text{ cm}^2$.

Cette section correspond à un pourcentage de :

$$\frac{21{,}9}{20 \times 20} = 5{,}5\ \% \ ;$$

c'est trop car supérieur à 5 % (chap. F.2) ; il faut donc augmenter la section de béton en adoptant, par exemple $b = 24$ cm d'où $i = \dfrac{24}{2\sqrt{3}} = 6{,}9$ cm

$$\lambda = \frac{200}{6{,}9} = 29\ (< 35)$$

$$\alpha = \frac{0{,}85}{1 + 0{,}2\left(\dfrac{\lambda}{35}\right)^2} = 0{,}75$$

et $$B_r = (24 - 2)^2 = 484 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

La condition à l'E.L.U. s'écrit alors :

$$870 \cdot 10^{-3} \leqslant 0{,}75\left(\frac{484 \cdot 10^{-4} \times 20}{0{,}9 \times 1{,}5} + A_s\ 10^{-4}\,\frac{400}{1{,}15}\right)$$

On en déduit $A_s \geqslant 12,7\ cm^2$.

Pourcentage $\frac{12,7}{24 \times 24} = 2,2\ \%$ (convenable)

On adoptera $4\ \phi\ 16 =$ 8,04 (dans les angles)
$4\ \phi\ 14 =$ 6,16 (au milieu des faces)
$A_s =$ $14,2\ cm^2 > 12,7$.

REMARQUE : λ étant < 35 on peut prendre en compte la totalité des barres sinon on ne pourrait compter que les aciers $4\ \phi\ 16$ se trouvant dans les angles (seuls efficaces contre le flambement).

Série B (5 m articulée)

La condition de résistance à l'E.L.U. s'écrit :

$$870\ 10^{-3} < 0,65 \left(\frac{38 \times 38 \times 10^{-4} \times 20}{0,9 \times 1,5} + A_s\ 10^{-4} \frac{400}{1,15} \right)$$

$$8700 \leqslant 0,65\ [21392 + 348\ A_s]$$

Cette condition est largement satisfaite même avec $A_s = 0$ (pas d'armature).

Cela provient de la satisfaction donnée à la condition de non flambement qui nous a conduit à une dimension importante de la section de béton afin de ne pas dépasser 50 pour l'élancement λ ; en revanche, sur le plan de la résistance intrinsèque de la section à la compression simple, on aboutit à une surabondance de la section de béton seul ; il conviendra donc de ne prévoir comme armatures que le pourcentage minimal exigé soit 0,2 %. (ch F.2).

$$A_s \geqslant 0,2 \frac{40 \times 40}{100} = 3,2\ cm^2.$$

On adoptera $4\ \phi\ 12 = 4,5\ cm^2$ (une barre dans chaque angle).

Il faut aussi $A_s \geqslant 4\ cm^2$ par mètre de parement soit $4\ (4 \times 0,40) = 6,4\ cm^2$. On rajoutera $4\ \phi\ 8 = 2\ cm^2$ (un au milieu de chaque face).

F.7.4. Optimisation :

Dans le cas de la série B, il peut être économique de diminuer la section de béton tout en ne mettant pas beaucoup plus d'armatures mais celles-ci étant nécessaires et justifiées pour la condition de résistance ; cela devient d'autant plus intéressant si la série comporte un grand nombre de poteaux. Supposons, par exemple, que l'on estime que le pourcentage économique ne doit pas dépasser 1 %. La diminution de la section du béton conduira à la diminution du coefficient α ;

adoptons provisoirement $\alpha = 0,60$ par exemple ; on peut alors écrire, si b est le nouveau côte de la *section réduite* :

$$870\ 10^{-3} \leqslant 0,60 \left(\frac{b^2 \cdot 10^{-4} \times 20}{0,9 \times 1,5} + \frac{b^2}{100} 10^{-4} \frac{400}{1,15} \right)$$

ce qui conduit à $b \geqslant 28$ cm (dimension réduite) soit en dimension réelle $b \geqslant 30$ cm adoptons $b = 32$ cm (au lieu des 40 cm précédents)

$$i = \frac{b}{2\sqrt{3}} = \frac{32}{2\sqrt{3}} = 9{,}2 \text{ cm}$$

$$\lambda = \frac{l_f}{i} = \frac{500}{9{,}2} = 54{,}4$$

$$\alpha = 0{,}60 \times \left(\frac{50}{54{,}4}\right)^2 = 0{,}51$$

La condition de résistance à l'E.L.U. s'écrit : avec $B_r = (30)^2 = 900 \text{ cm}^2$.

$$870 \cdot 10^{-3} \leqslant 0{,}51 \left(\frac{900 \cdot 10^{-4} \times 20}{0{,}9 \times 1{,}5} + A_s\, 10^{-4}\, \frac{400}{1{,}15}\right)$$

d'où $A_s \geqslant 10{,}7 \text{ cm}^2$.

On pourrait adopter $4\,\phi\,16 + 4\,\phi\,10 = 11{,}2 \text{ cm}^2$ mais les ϕ 10 nous obligeraient à placer les cadres tous les 15 cm ($s_t \leqslant 15\,\phi$) ; il est préférable d'adopter $8\,\phi\,14 = 12{,}3 \text{ cm}^2$, l'espacement des cadres étant alors 20 cm ($15 \times 1{,}4 = 21$ cm).

A remarquer que la diminution de section entraîne une décroissance rapide de α et qu'il ne serait certainement pas rentable de diminuer davantage la section de béton.

F.7.5. Armatures transversales (*A.8.1.3)

Il faut adopter : $\phi_T \simeq 1/3\, \phi_L$

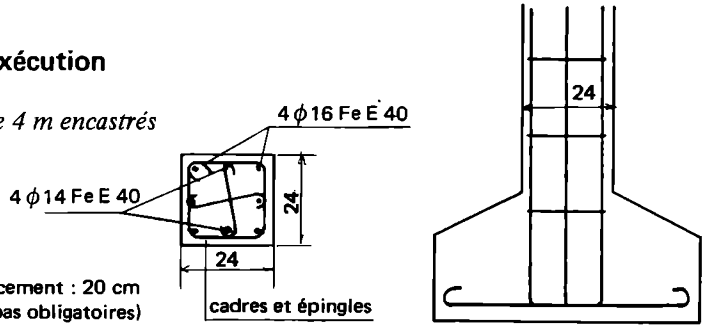
$\phi_L = 14$ et 16 mm - on adoptera des cadres en $\phi = 6$ mm (Fe E 24).

L'espacement maximal s_t est 15 ϕ_L soit $s_t \geqslant 15 \times 14 = 210$ mm. On adoptera $s_t = 20$ cm.

Ce qui est également inférieur à 40 cm ainsi qu'à la plus petite dimension augmentée de 10 cm (§ F.2.2).

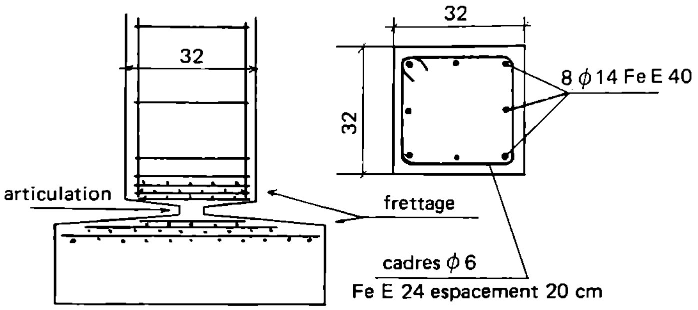
F.7.6. Dessin d'exécution

Série A : Poteaux de 4 m encastrés



φ6 Fe E 24 - espacement : 20 cm
(les épingles ne sont pas obligatoires)

Série B : Poteaux de 5 m articulés

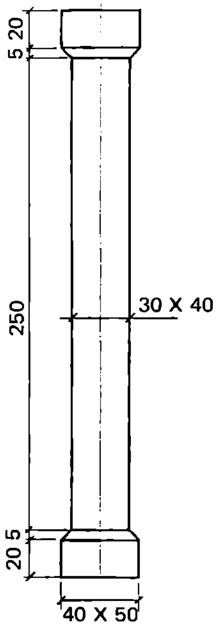


Nota - Les recouvrements d'armatures longitudinales se font sur la longueur de scellement droits l_s (voir § C.5.3). Sur la longueur de recouvrement, on droit trouver *au moins 3* nappes d'armatures transversales ; l'espacement maximal de ces nappes ne doit pas dépasser 15 fois le diamètre des armatures longitudinales.

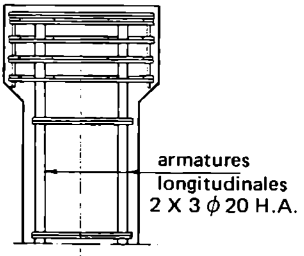
CHAPITRE F.8

POTEAU EXPÉRIMENTAL EN COMPRESSION SIMPLE

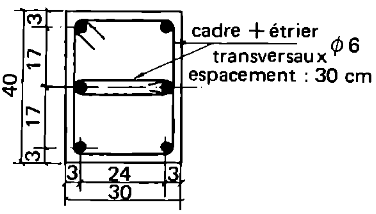
Le poteau ci-dessous fait partie d'une série de poteaux essayés jusqu'à rupture au Centre d'Essais des Structures de St-Rémy-les-Chevreuse.



Détail de ferraillage d'une tête



Coupe en section courante



Les plateaux de la presse étant articulés sur surfaces sphériques, le poteau peut être considéré comme articulé à ses deux extrémités ; la longueur de flambement l_f est donc égale à la longueur de poteau $l_0 = 3{,}00$ m.

a) **Élancement** : $\lambda = \dfrac{l_f}{i} \qquad i = \dfrac{b}{2\sqrt{3}}$

b côté le plus petit $\qquad b = 30$ cm

$$i = \frac{30}{2\sqrt{3}} = 8{,}7 \text{ cm} \qquad l_f = l_0 = 300 \text{ cm}$$

$$\lambda = \frac{300}{8{,}7} = 34{,}5 < 50.$$

b) Matériaux

Le béton est un béton de haute résistance pour lequel on admettra :

$$f_{c_{28}} = 25 \text{ MPa}.$$

Les aciers sont des «TOR» (acier écroui H.A. Fe E 40) pour lesquels la limite élastique est prise égale à $f_e = 400$ MPa.

c) Effort normal résistant ultime :

$$N_{ru} = \alpha \left(\frac{B_r f_{c28}}{0{,}9\,\gamma_b} + A_s \frac{f_e}{\gamma_s} \right)$$

α coefficient de flambement

$$\alpha = \frac{0{,}85}{1 + 0{,}2\left(\frac{\lambda}{35}\right)^2} \quad \text{avec} \quad \lambda = 34{,}5 \ \alpha = 0{,}71$$

B_r (aire diminuée de 1 cm sur le pourtour)

$B_r = (30-2)(40-2) = 1064 \text{ cm}^2 = 0{,}1064 \text{ m}^2$

$f_{c28} = 25$ MPa $\quad \gamma_b = 1{,}5$

$A_s = 6$ T $20 = 1884 \text{ mm}^2 = 1{,}884\ 10^{-3} \text{ m}^2$

$f_e = 400$ MPa $\quad \gamma_s = 1{,}15$

On trouve $N_{ru} = 1{,}864$ MN $= 1864$ kN

d) Effort normal de service : N_Q

La combinaison à l'E.L.U. est :

$$N_u = 1{,}35\ N_G + 1{,}50\ N_Q$$

N_G effort normal de poids propre (faible et souvent négligeable).

Ici : $N_u = 1{,}35 \times 9 + 1{,}50\ N_Q = 12{,}15 + 1{,}50\ N_Q$.

Il faut $N_u \leqslant N_{ru}$

$$12{,}15 + 1{,}50\ N_Q \leqslant 1864 \text{ kN} \quad \text{d'où} \quad N_Q\,(\text{max}) = 1235 \text{ kN}$$

La charge de rupture expérimentale a été de 4200 kN ; le coefficient de sécurité à la rupture est donc : $\frac{4200}{1235} = 3{,}4$.

e) Évaluation de la charge de rupture :

Supprimons tous les coefficients de sécurité ; la résistance réelle du béton en compression (sur éprouvette) a été de 31 MPa d'où l'effort normal de rupture N_R

(en négligeant l'effet de flambement le poteau étant relativement peu élancé et la charge *parfaitement centrée*) :

$$N_R = B(f_{cj}) + A_s\,(f_e) = 0{,}40 \times 0{,}30 \times 31 + 18{,}84 \cdot 10^{-4} \times 400 \text{ MPa}$$

soit $N_R = 4{,}474$ MN soit 4474 kN.

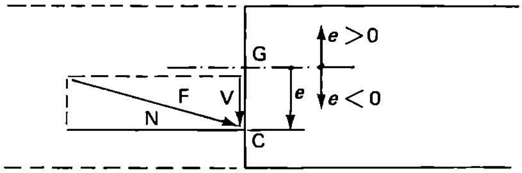
On a trouvé expérimentalement $N_R = 4200$ kN ce qui montre que, dans ce cas, le coefficient réel de flambement était effectivement négligeable ; le coefficient appliqué $\alpha = 0{,}71$ pour le calcul de la charge maximale de service représente donc, en fait, *un coefficient forfaitaire de sécurité au flambement*, et à d'éventuels défauts de section et de centrage ; le coefficient α qu'il aurait fallu appliquer ici aurait dû être : $\alpha \simeq \frac{4200}{4474} = 0{,}94$ et non 0,71 car dans ce cas particulier, *en laboratoire*, les défauts de centrage et de coffrage étaient plus faibles que dans les poteaux couramment réalisés sur chantier.

MODULE G - FLEXION COMPOSÉE
CAS DES POTEAUX EN COMPRESSION EXCENTRÉE

CHAPITRE G.1

DÉFINITION

Dans la flexion simple une section de calcul n'est soumise qu'à un moment de flexion simple M et à un effort tranchant V ; on est en *flexion composée* quand, de plus, la section est soumise à un effort normal N ; si l'effort F est incliné sur la section on le décompose en un effort normal N et un effort tangentiel V qui vient s'ajouter (algébriquement) à l'effort tranchant dans cette section ; c'est en particulier le cas des efforts de précontrainte.



L'effort normal N à prendre ainsi en compte en flexion composée est compté *positif* pour la compression ; pour la traction il est compté *négatif*.

CHAPITRE G.2

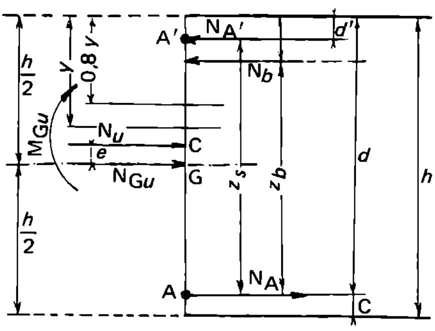
ÉTUDE DES SOLLICITATIONS

L'effort normal N est appliqué en un point C à une distance e (appelée excentrement) du centre de gravité G ; il en résulte un moment supplémentaire N × e (par rapport au centre de gravité) ; pour conserver le même signe d'orientation des moments, e sera compté négatif pour C en dessous de G (ou à gauche dans une section horizontale) et positif en dessus de G (ou à droite dans une section horizontale). *Quand on est en flexion simple* le moment fléchissant dans une section est en principe axé sur le centre de gravité mais il reste le même si on le considère par rapport à un autre point par exemple au niveau des armatures tendues.

Par contre, en flexion composée la présence de l'effort normal appliquée en un point C engendre un moment dont la valeur dépend du point par rapport auquel on calcule ce moment.

Nous nous limiterons tout d'abord au cas de la section rectangulaire dont nous supposerons connues b_0, et h ainsi que d et d' ; d' et $c = h - d$ varient en général entre 1/5 et 1/20 de h ; selon que h est faible ou grand ; 1/10 est une valeur courante.

Nous adopterons les notations figurant sur le croquis ci-après :



Les sollicitations (moment, effort normal et effort tranchant) seront calculées à l'état-limite ultime avec les coefficients habituels (en général) :

1,35 sur les charges permanentes
1,50 sur les charges d'exploitation (1,60 sur les charges routières).

Si une section est soumise à un moment de flexion simple M_u, le moment M_{Gu} sera établi par rapport au centre de gravité G et comprendra le moment dû à l'effort normal N_u appliqué au point C avec l'excentrement e :

$$M_{Gu} = M_u + N_u \times e.$$

Le système de sollicitations (en contraintes normales) se trouve donc réduit à :

M_{Gu} et N_{Gu} (appliqué au centre de gravité) et le moment calculé par rapport à l'axe des armatures tendues sera :

$$M_{Au} = M_{Gu} + N_{Gu}\left(d - \frac{h}{2}\right).$$

En flexion composée il faut donc toujours préciser en quel point on effectue la réduction des forces car, la valeur du moment n'est pas indépendante de ce point.

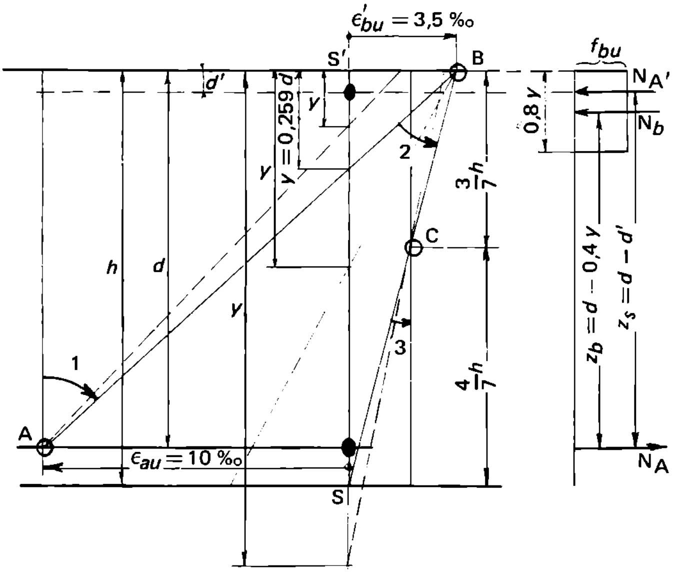
CHAPITRE G.3

RÈGLE DES TROIS PIVOTS - COMPLÉMENTS

G.3.1. Rappel

Nous allons tout d'abord rappeler puis développer la règle des trois pivots.

Diagramme des déformations — Diagramme des forces et des contraintes



On pose $\alpha = \frac{y}{d}$.

Domaine 1 (pivot A) $y \leqslant \frac{3,5}{3,5 + 10} d = 0,259\, d$ $\qquad \alpha \leqslant 0,259$

Domaine 2 (pivot B) $0,259\, d \leqslant y \leqslant h$ $\qquad 0,259 \leqslant \alpha \leqslant \frac{h}{d}$ (~ 1,10)

Domaine 3 (pivot C) $y \geqslant h$ $\qquad \alpha \geqslant 1,10$

y est la profondeur de l'axe neutre des déformations à partir de la fibre supérieure.

G.3.2. Équations de base

Équation de projection des forces

$$\underbrace{N_{Gu}}_{\text{action}} = \underbrace{N_b + N_{A'} - N_A}_{\text{réaction}}$$

soit
$$N_A = N_{A'} + N_b - N_{Gu}$$

$$N_A = A\sigma_s \quad N_{A'} = A'\,\sigma_s' \quad N_b = 0{,}8\,y\,b_0 \times f_{bu}$$

σ_s et σ_s', : contraintes de traction et de compression dans les aciers de section A (inférieurs) et A′ (supérieurs).

f_{bu} = contrainte limite ultime du béton $f_{bu} = \dfrac{0{,}85\,f_{c28}}{1{,}5}$

d'où
$$N_A = A'\sigma_s' + 0{,}8\,y\,b_0 \times f_{bu} - N_{Gu}.$$

Équation des moments : établis au niveau des aciers tendus :

$$\underbrace{M_{Au}}_{\substack{\text{moment}\\\text{sollicitant}}} = \underbrace{\overbrace{N_b\ z_b}^{M_b} + \overbrace{N_{A'}\,z_s}^{M_{A'}}}_{\text{moment résistant}}$$

$$z_b = d - 0{,}4\,y = d\,(1 - 0{,}4\,\alpha) \quad \text{car} \quad y = \alpha\,d.$$

$$z_s = d - d'$$

$$M_b = N_b\,z_b = \overbrace{(0{,}8\,\alpha\,d\,b_0 \times f_{bu})}^{N_b}\ \overbrace{d\,(1 - 0{,}4\,\alpha)}^{z_b}$$

$$= 0{,}8\,\alpha\,(1 - 0{,}4\,\alpha)\,b_0\,d^2 \times f_{bu}$$

$$\boxed{M_{Au} = 0{,}8\,\alpha\,(1 - 0{,}4\,\alpha)\,b_0\,d^2 \times f_{bu} + A'\,\sigma_s'\,(d - d')}$$

M_{Au} = moment de sollicitation connu : $M_{Au} = M_{Gu} + N_{Gu}\left(d - \dfrac{h}{2}\right)$

$M_{A'} = A'\,\sigma_s'\,(d - d')$ sera connu par hypothèse faite sur A′ et σ_s' choisis a priori ; dans le cas où il n'y a pas d'aciers comprimés $M_{A'} = o$ évidemment.

posons $\quad \mu = 0{,}8\,\alpha\,(1 - 0{,}4\,\alpha) \quad$ (α seule connue)

on a $\quad \mu = \dfrac{M_{Au} - M_{A'}}{b_0\,d^2\,f_{bu}} \quad$ soit $\quad \mu = \dfrac{M_b}{b_0\,d^2\,f_{bu}}$

μ (coefficient sans dimension appelé quelquefois «*moment réduit*») caractérise la fraction de moment équilibrée par le béton seul ; $M_{A'}$ représente en effet le complément équilibré par les aciers comprimés seuls (quand il y en a, sinon $M_{A'} = 0$), ces moments étant calculés par rapport à l'axe des aciers tendus N_A.

G.3.3. Moments de référence

a) **Moment M_{AB}** : c'est le moment résistant correspondant au diagramme des déformations AB (limite entre les domaines 1 et 2)

$$\alpha = 0{,}259 \qquad \mu = 0{,}8 \times 0{,}259\,(1 - 0{,}4 \times 0{,}259) = 0{,}186$$

$$\boxed{M_{AB} = 0{,}186\; b_0\, d^2\, f_{bu}}$$

on l'appelle : moment limite.

b) **Moment M_{BC}** : c'est le moment résistance correspondant au diagramme des déformation BC (limite entre les domaines 2 et 3).

$$\alpha = \frac{h}{d} \text{ (1,10 en général).}$$

$$\mu = 0{,}8 \times 1{,}10\,(1 - 0{,}4 \times 1{,}10) = 0{,}493$$

$$\boxed{M_{BC} = 0{,}493\; b_0\, d^2\, f_{bu}}$$

G.3.4. Détermination du pivot ; conséquences

1er cas : $M_{Au} < M_{AB}$

on est au pivot A dans le domaine 1 et $\alpha < 0{,}259$.

Le diagramme de compression du béton est tronqué par en haut ; sa résistance est donc mal utilisée tandis que la résistance en traction des aciers est utilisée au maximum.

2è cas : $M_{AB} < M_{Au} < M_{Bc}$

on est au pivot B dans le domaine 2 et : $0{,}259 < \alpha < \frac{h}{d}$ ($\sim$ 1,10).

Le diagramme de compression du béton est complet (parabole rectangle ou rectangle simplifié de hauteur 0,8 y) ; la résistance du béton est donc pleinement utilisée mais la résistance des aciers l'est moins surtout si leur allongement est inférieur à celui qui correspond à leur limite élastique (f_e).

3è cas : $M_{Au} > M_{Bc}$

on est au pivot C dans le domaine 3 et $\alpha > \frac{h}{d}$ car $y = \alpha\, d > h$.

Le diagramme des contraintes sur le béton est tronqué par en bas ; sa résistance est bien utilisée, la section est entièrement comprimée et les aciers inférieurs A ne sont pas utilisés en traction mais en compression.

G.3.5. Calculs en pivot A

a) Faible raccourcissement du béton

Dans les calculs de vérification d'une dalle, on atteint fréquemment l'épuisement des aciers bien avant celui du béton lequel n'atteint parfois qu'un raccourcissement relativement faible ($\epsilon_b < 2$ ‰) sa contrainte maximale restant inférieure à f_{bu}.

En effet, dans une dalle, on calcule, en général, une tranche de 1 m ; la largeur b_0 du béton comprimé est très grande et cela tend à minorer la contrainte σ_b à une valeur inférieure à f_{bu}.

Dans ce cas, on ne peut plus valablement assimiler le diagramme des contraintes sur le béton à un rectangle de hauteur $0{,}8\,y$ avec une contrainte uniforme f_{bu}.

b) Réduction du coefficient de remplissage

Si l'on considère la courbe contrainte-déformation théorique, en parabole-rectangle, nous rappelons que le coefficient de remplissage ψ est le rapport entre l'aire couverte par la courbe de contrainte réelle dans la section et celle du rectangle de hauteur y et de largeur f_{bu}.

Si $\epsilon_b = 3{,}5$ ‰ on a $\psi = 0{,}8$

Si $\epsilon_b = 2$ ‰ on a $\psi = 2/3 = 0{,}66$ (secteur parabolique)

Si $\epsilon_b < 0{,}5$ ‰ on a $\psi \rightarrow \dfrac{\frac{1}{2} b_0\, y\, \sigma_b}{b_0\, y\, f_{bu}} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\sigma_b}{f_{bu}} \rightarrow 0$ (secteur triangulaire)

Sur le graphique ci-après, nous avons porté en ordonnée le rapport $\dfrac{\sigma_b}{f_{bu}}$; on pourra donc si $\epsilon_b < 2$ ‰ en déduire la valeur, dans la section, de $\sigma_{b\max} < f_{bu}$; par exemple, si $\epsilon_b = 1$ ‰ $\sigma_{b\max} = 0{,}75\, f_{bu}$.

Nous avons tracé sur ce même graphique la diminution progressive du coefficient de remplissage ψ, de 0,8 (pour $\epsilon_b = 3{,}5$ ‰) à 0,66 pour $\epsilon_b = 2$ ‰ et à 0 pour $\epsilon_b = 0$.

Connaissant ϵ_b on peut donc lire la valeur de ψ correspondante et calculer $F_b = \psi\, b_0\, y\, f_{bu}$.

Enfin, nous avons également représenté, sur ce graphique, la variation de la profondeur du centre de pression de la force de compression F_b sur le béton ; cette profondeur est égale à $\delta_G y$ avec :

$\delta_G = 0{,}40$ si $\epsilon_b = 3{,}5$ ‰

$\delta_G = 3/8 = 0{,}38$ si $\epsilon_b = 2$ ‰ (secteur parabolique)

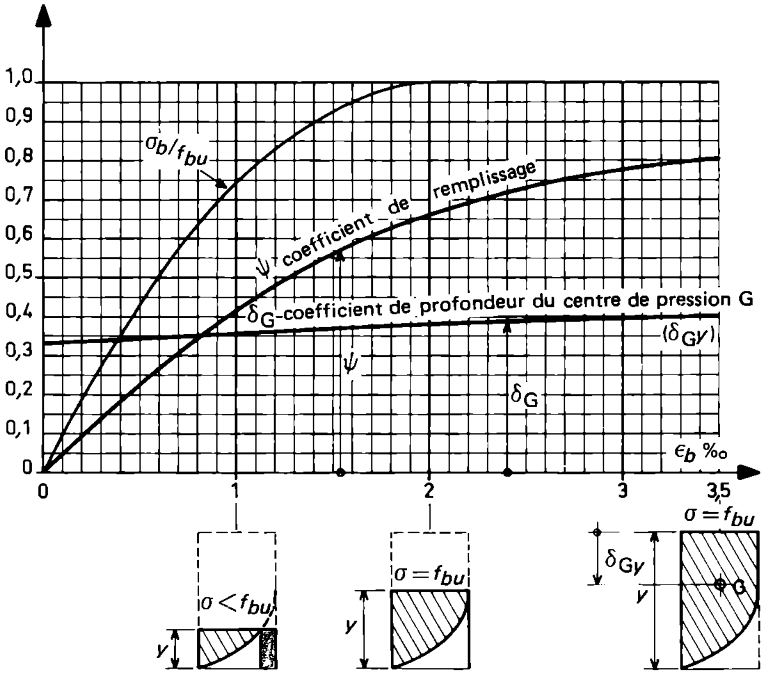
$\delta_G = 1/3 = 0{,}33$ si $\epsilon_b = 0{,}5$ ‰ (secteur triangulaire)

Cela permet le calcul du bras de levier du couple résistant

$$z = d - \delta_G\, y$$

Expressions analytiques

$\epsilon_b \leqslant 2$ ‰	$\epsilon_b \geqslant 2$ ‰
$\sigma_b/f_{bu} = \dfrac{\epsilon_b}{2\cdot 10^{-3}}\left(2 - \dfrac{\epsilon_b}{2\cdot 10^{-3}}\right)$	$\sigma_b/f_{bu} = 1$
$\psi = \epsilon_b\,\dfrac{6\cdot 10^{-3} - \epsilon_b}{12\cdot 10^{-6}}$	$\psi = 1 - \dfrac{2\cdot 10^{-3}}{3\,\epsilon_b}$
$\delta_G = \dfrac{8\cdot 10^{-3} - \epsilon_b}{4\,(6\cdot 10^{-3} - \epsilon_b)}$	$\delta_G = \dfrac{3\,\epsilon_b^2 - 4\cdot 10^{-3}\,\epsilon_b + 2\cdot 10^{-6}}{2\,\epsilon_b\,(3\,\epsilon_b - 2\cdot 10^{-3})}$



Variation des coefficients ψ et δ G et du rapport $\dfrac{\sigma_b}{f_{bu}}$ lorsque $\epsilon_b < 3{,}5$ ‰.

Exemple :

Poutre : $b_0 = 30$ cm $d = 90$ cm $f_{cj} = 25$ MPa → $f_{bu} = 14{,}2$ MPa.

Si on est au pivot A avec $y = 12$ cm on aura $\epsilon_b = 1{,}5$ ‰ d'où d'après le graphique ci-dessus :

$$\psi = 0{,}56 \quad \text{et} \quad \delta_G = 0.36$$

On aura donc $F_b = \psi\, b_0\, y f_{bu} = 0{,}56 \times 0{,}30 \times 0{,}12 \times 14{,}2$

$$F_b = 0{,}286 \text{ MN} \quad \text{et} \quad z = d - \delta_G y = 90 - 0{,}36 \times 12 = 85{,}7 \text{ cm}$$

$$M_{ru} = z\, F_b = 0{,}857 \times 0{,}286 = 245\cdot 10^{-3} \text{ MN.m} = 245 \text{ kN.m.}$$

CHAPITRE G.4

PRINCIPE DE CALCUL

Le problème posé à l'ingénieur peut se résoudre suivant le principe de calcul suivant :

- calcul des sollicitations ultimes au niveau du centre de gravité : M_{Gu} et N_{Gu}.
- choix d'une dimension de section : b_0 et h.
- supposition qu'il n'y a pas d'aciers comprimés ($A' = o$) ou choix à priori d'une section d'armatures A' et de leur contrainte σ'_s ; on prend en général

$$\sigma'_s = f_{su} = \frac{f_e}{1{,}15} \, ;$$

on a donc $$N_{A'} = A' f_{su}.$$

- choix de la résistance limite ultime du béton $f_{bu} = \dfrac{0{,}85\, f_{c28}}{\gamma_b}$ ($\gamma_b = 1{,}5$).

on adopte souvent la valeur courante $f_{c28} = 20$ MPa (voir § A.3.1) ce qui donne $f_{bu} \simeq 11{,}5$ MPa.

- le processus de calcul va pouvoir alors se dérouler par étapes pour aboutir à la détermination des armatures tendues :

1ère étape : Le moment sollicitant pris au niveau de l'armature tendue est égale à :

$$M_{Au} = M_{Gu} + N_{Gu}\left(d - \frac{h}{2}\right).$$

2ème étape : On suppose connu $N_{A'}$, on a donc $M_{A'} = N_{A'}\, z_s$

$$= A'\, f_{su}\, z_s$$

avec $z_s = d - d'$

3ème étape : On peut alors calculer

$$\mu = \frac{M_{Au} - M_{A'}}{b_0\, d^2\, f_{bu}} \qquad (\text{§ G.3.2})$$

4ème étape : La relation $\mu = 0{,}8\ \alpha\ (1 - 0{,}4\ \alpha)$ permet alors de déterminer la valeur correspondante de α, seule inconnue du problème, par résolution d'une équation du second degré. Une seule racine est utilisable :

$$\alpha = 1{,}25\ (1 - \sqrt{1 - 2\,\mu}).$$

La valeur de α permet de connaître le domaine où on se trouve, c'est-à-dire, le pivot :

$\alpha < 0{,}259 \rightarrow$ domaine 1, pivot A

$0{,}259 \leqslant \alpha \leqslant h/d \rightarrow$ domaine 2, pivot B $h/d \simeq 1{,}10$ en général

$\alpha > h/d \rightarrow$ domaine 3, pivot C

5ème étape : A partir de la connaissance de α, on peut alors suivre un double chemin :

α

$y = \alpha d$

$N_b = 0{,}8\, y\, b_0\, f_{bu}$ (nota)

de la relation d'équilibre des forces on peut déduire la force à équilibrer par l'armature tendue A :

$N_A = N_b + N_{A'} - N_{Gu}$

la connaissance du pivot et de la valeur de α permet de tracer le diagramme des déformations. D'où les déformations des aciers :

ϵ_s (allongement)

ϵ'_s (raccourcissement)

Le diagramme contrainte-déformation de l'acier donne les contraintes : σ_s et σ'_s, en fonction des déformations précédentes.

$$A = \frac{N_A}{\sigma_s}$$

Nota - Si α est nettement inférieur à 0,259, ϵ_b est alors nettement inférieur à $\epsilon_{bu} = 3{,}5$ ‰ ; on est au pivot A et $\epsilon_b = 10 \dfrac{y}{d - y}$ ‰ $= \dfrac{10\,\alpha}{1 - \alpha}$ ‰.

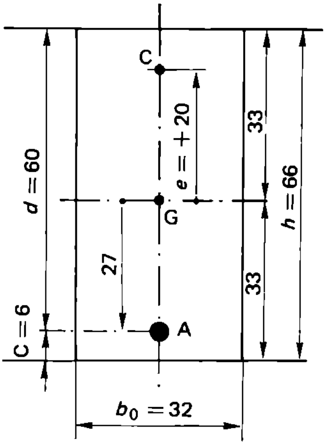
La valeur de ϵ_b permet de lire sur le graphique précédent le coefficient de remplissage ψ et δ_G.

On a alors $N_b = \psi\, y\, b_0 f_{bu}$ et $z = d - \delta_G\, y$

CHAPITRE G.5

EXEMPLES DE CALCUL

G.5.1. Section rectangulaire sans armatures comprimées (A' = 0)



Soit un moment de flexion simple :

M_u = 262 kN.m

L'effort normal est (compression) :

N_u = 500 kN appliqué en C avec une excentricité $e = +20$ cm (voir Nota)

Le moment fléchissant ultime est :

M_{Gu} = 362 kN.m

$(M_u + N_u \times e)$

Le moment pris par rapport à l'axe des armatures tendues est :

$$M_{Au} = M_{Gu} + N_{Gu}\left(d - \frac{h}{2}\right).$$

$$M_{Au} = 362 + 500\left(0{,}60 - \frac{0{,}66}{2}\right) \qquad M_{Au} = 497 \text{ kN.m} = 497\ 10^{-3} \text{ MN.m}$$

on a donc : $$\mu = \frac{M_{Au}}{b_0\, d^2\, f_{bu}} \qquad (M_{A'} = 0 \text{ car } A' = 0)$$

on adopte un béton courant f_{c28} = 20 MPa d'où f_{bu} = 11,5 MPa on a donc :

$$\mu = \frac{497\ 10^{-3}}{0{,}32 \times 0{,}60^2 \times 11{,}5} = 0{,}375$$

on constate que $0{,}259 < \mu < 0{,}493$ autrement dit que

$$M_{AB} < M_{Au} < M_{BC}. \qquad (\S\ G.3.1)$$

On est donc au pivot B et dans le domaine 2 on a :

$$\alpha = 1{,}25\,(1 - \sqrt{1 - 2\mu}) = 0{,}625.$$

Nota - pour l'excentricité e voir chapitre G7 ci-après ; e est ici *l'excentricité totale de calcul.*

A partir de $\alpha = 0{,}625$ on peut poursuivre les calculs suivant le cheminement ci-après :

$y = \alpha d = 0{,}625 \times 0{,}60 = 0{,}375$

$N_b = 0{,}8\, y\, b_0\, f_{bu}$

$= 0{,}8 \times 0{,}375 \times 0{,}32 \times 11{,}5$

$= 1{,}104 \text{ MN} = 1104 \text{ kN}$

$N_A = N_b - N_{Gu} = 1104 - 500 = 604 \text{ kN}$

$$A = \frac{604\ 10^{-3}}{200} = 3.02\ 10^{-3} \text{ m}^2$$

$= 3020 \text{ mm}^2$ (Fe E 24)

utilisation d'un acier écroui

$$A = \frac{604\ 10^{-3}}{325} = 1{,}86\ 10^{-3} \text{ m}^2$$

$= 1860 \text{ mm}^2$ (Fe E 40)

$$\epsilon_s = \frac{1-\alpha}{\alpha} 3{,}5\ 10^{-3} = 2{,}10\ 10^{-3}$$

cas d'un acier naturel lisse type 1 Fe E 24

on lit sur le graphique simplifié en A.3.2.f., pour $\epsilon_s = 2{,}1\ 10^{-3}$

$$\sigma_s \simeq 200 \text{ MPa}$$

cas d'un acier écroui type 2 Fe E 40 pour lequel

$$f_{su} = \frac{f_e}{\gamma_s} = \frac{400}{1.15} = 348 \text{ MPa}$$

on lit sur le graphique pour type 2 (pour $\epsilon_s = 2{,}1\ 10^{-3}$)

$$\sigma_s \simeq 325 \text{ MPa}$$

G.5.2. Section rectangulaire avec armatures comprimées

1er cas :

Considérons la même section mais pour laquelle les sollicitations ultimes seraient :

$M_{Gu} = 500$ kN.m ($500\ 10^{-3}$ MNm) et $N_{Gu} = 800$ kN ($800\ 10^{-3}$ MN).

Nous prévoyons des armatures comprimées en acier écroui Fe E 40 pour une section $A' = 4\ \phi\ 20 = 1257 \text{ mm}^2$ ($1{,}257\ 10^{-3}\ \text{m}^2$) avec $d' = 6$ cm.

On suppose, *pour commencer,* que leur contrainte atteindra la valeur limite courante $f_{su} = \dfrac{400}{1.15} = 348$ MPa.

$$M_{Au} = M_{Gu} + N_{Gu}\left(d - \frac{h}{2}\right) = 500 + 800\left(0{,}60 - \frac{0{,}66}{2}\right)$$

$$= 716 \text{ kN.m} = 0{,}716 \text{ MN.m}$$

$$M_{A'} = A' f_{su}\,(d - d') = \underbrace{1{,}257\ 10^{-3} \times 348}_{N_{A'} = 437\ 10^{-3}\ \text{MN}}\ \overbrace{(0{,}60 - 0{,}06)}^{Zs}$$

$$M_{A'} = 0{,}236 \text{ MN.m}$$

$$\mu = \frac{M_{Au} - M_{A'}}{b_0\, d^2\, f_{bu}} = \frac{0{,}716 - 0{,}236}{0{,}32 \times 0{,}60^2 \times 11{,}5} = 0{,}362$$

$$\alpha = 1{,}25\,(1 - \sqrt{1 - 2\mu}) = 0{,}59$$

d'où $y = 0{,}59 \times 0{,}60 = 0{,}354$ m.

Le raccourcissement ϵ_s' de l'armature comprimée est

$$\epsilon_s' = \frac{35{,}4 - 6}{35{,}4} 3{\cdot}5\ 10^{-3} = 2{,}9\ 10^{-3}$$

sur le graphique des aciers écrouis type 2, on lit, pour $\epsilon_s' = 2{,}9\ 10^{-3}$,

$$\sigma_s' = 340 \text{ MPa}.$$

Or au départ nous avons supposé que la contrainte dans ces aciers était de 348 MPa ; il faudrait donc normalement avoir recours à une itération et recommencer le calcul en adoptant une valeur intermédiaire par exemple $\sigma_s' = 344$ MPa mais la différence est si faible que son influence peut être considérée comme négligeable et nous poursuivrons le calcul avec la valeur primitive $\sigma_s' = 348$ MPa.

Avec $y = 0{,}354$ et $\alpha = 0{,}59$ on peut poursuivre le calcul suivant le cheminement suivant :

$$N_b = 0{,}8\, y\, b_0\, f_{bu}$$
$$= 0{,}8 \times 0{,}354 \times 0{,}32 \times 11{,}5 = 1{,}042 \text{ MN}$$
$$N_{A'} = 348 \times 1{,}257\ 10^{-3} = 437\ 10^{-3} \text{ MN}$$
$$N_A = N_{A'} + N_b - N_{Gu}$$
$$= 0{,}437 + 1{,}042 - 0{,}80 = 0{,}679 \text{ MN}$$

$$\epsilon_s = \frac{1-\alpha}{\alpha}\, 3{,}5\ 10^{-3} = \frac{1-0{,}59}{0{,}59}\, 3{,}5\ 10^{-3}$$
$$= 2{,}43\ 10^{-3}$$

Pour $\epsilon_s = 2{,}43\ 10^{-3}$ on lit sur le graphique des aciers écrouis :

$$\sigma_s = 332 \text{ MPa}$$

$$A = \frac{N_A}{\sigma_s} = \frac{0{,}679}{332} = 2045\ 10^{-6} \text{ m}^2 = 2045 \text{ mm}^2$$

par exemple : $3\,\phi\,25 + 2\,\phi\,20 = 2101 \text{ mm}^2$.

Si l'on désire réaliser une section symétrique $A = A'$ on pourra avoir recours à l'itération et choisir alors une section A' intermédiaire entre la valeur choisie à priori 1257 mm² et la valeur trouvée ainsi pour $A = 2045$ mm² ; soit par exemple

$$A' = \frac{1257 + 2045}{2} = 1651 \text{ mm}^2.$$

Le même processus de calcul conduira alors à la valeur $A = 1731$ mm² ; l'itération est donc *très rapidement convergente* et on pourra en définitive adopter

$$A = A' = \frac{1651 + 1731}{2} = 1691 \text{ mm}^2.$$

On adoptera une section réelle un peu supérieure par exemple :

$$A = A' = 4\,\phi\,20 + 1\,\phi\,25 = 1748 \text{ mm}^2\ (> 1691).$$

G.5.3. Méthode du «moment réduit μ» appliquée à la flexion simple

Elle se déduit de la méthode générale exposée au chapitre G.3 concernant la flexion composée.

On calcule : $$\mu = \frac{M_u}{b_0\, d^2\, f_{bu}}$$

d'où : $$\alpha = 1{,}25\,(1 - \sqrt{1 - 2\mu})$$

on a alors : $$y = \alpha\, d.$$

1) $\alpha < 0{,}259$ on est au pivot A.

$$\epsilon_s = 10\ ‰ \text{ et } \sigma_s = f_{su}.$$

On calcule $\epsilon_b = 10 \times \dfrac{\alpha}{1-\alpha}$ ‰.

ϵ_b permet de trouver la valeur de δ_G (§ G.3.5.b) d'où $z = d - \delta_G y$.

On calcule $F_s = \dfrac{M_u}{z}$ et $A_s = \dfrac{F_s}{f_{su}}$.

2) $\alpha > \mathbf{0{,}259}$ on est au pivot B.

$\epsilon_b = \epsilon_{bu} = 3{,}5$ ‰ $z = d - 0{,}4\,y$.

On calcule $\epsilon_s = 3{,}5\ \dfrac{1-\alpha}{\alpha}$ ‰.

Sur le graphique contrainte-déformation de l'acier à l'E.L.U. on lit la contrainte σ_s correspondant à ϵ_s.

On a $F_s = \dfrac{M_u}{z}$ et $A_s = \dfrac{F_s}{\sigma_s}$.

3) $\alpha = \mathbf{0{,}259}$ M_u est égal au moment limite (AB) correspondant à $\mu = 0{,}186$.

Les calculs en pivot A ou en pivot B conduiront au même résultat.

Application : Reprenons l'exemple B.5.

$$M_u = 193{,}2 \text{ kN.m} \quad b_0 = 0{,}24 \text{ m} \quad d = 0{,}54 \text{ m}$$

$$f_{cj} = 24 \text{ MPa} \quad \text{d'où} \quad f_{bu} = 13{,}6 \text{ MPa}$$

$$f_{su} = \frac{f_e}{1{,}15} = \frac{400}{1{,}15} = 348 \text{ MPa}$$

$$\mu = \frac{193{,}2\ 10^{-3}}{0{,}24\ (0{,}54)^2\ 13{,}6} = 0{,}20.$$

D'où $\alpha = 1{,}25\,(1 - \sqrt{1 - 2 \times 0{,}20}) = 0{,}29$

$\alpha > 0{,}259$ on est au pivot B $y = \alpha d$.

$$y = 0{,}259 \times 54 = 15{,}7 \text{ cm.}$$

$$z = d - 0{,}4\,y = 54 - 0{,}4 \times 15{,}7 = 47{,}7 \text{ cm}$$

$$\epsilon_s = 3{,}5\,\frac{1 - 0{,}29}{0{,}29} = 8{,}6\ ‰.$$

Le palier plastique est atteint : $\sigma_s = 348$ MPa

$$F_s = \frac{193{,}2}{0{,}477} = 405 \text{ kN} = 405\ 10^{-3} \text{ MN}$$

$$A_s = \frac{405\ 10^{-3}}{348} = 11{,}6\ 10^{-4} \text{ m}^2 = 11{,}6 \text{ cm}^2.$$

La section minimale nécessaire trouvée ici concorde bien avec les 6 ϕ 16 adoptés (6 ϕ 16 = 12,06 cm²).

Nota : Si l'on a la *certitude* d'acier écroui du type 2, on aurait pu toutefois à partir de la valeur de $\epsilon_s = 8{,}6$ ‰ déterminer sur le graphique de cet acier à l'E.L.U. (A.3.2.d) la contrainte correspondante compte tenu de son augmentation de $\frac{f_e}{\gamma_s}$ à $\frac{1{,}10\, f_e}{\gamma_s}$ lorsque ϵ_s tend vers 10 ‰ ; on aurait trouvé $\sigma_s = 376$ MPa (au lieu de la valeur plafonnée à $\frac{f_e}{\gamma_s} = 348$ MPa) d'où $A_s = \frac{405\ 10^{-3}}{376} = 10{,}77\ cm^2$ (au lieu de $11{,}6\ cm^2$) cela aura permi une légère économie d'acier (7,5 %).

Le BAEL 83 précise qu'il faudrait alors contrôler cette augmentation par des essais ; c'est pourquoi cette possibilité est rarement utilisée.

CHAPITRE G.6

DIAGRAMME D'INTERACTION

G.6.1. Objet :

L'ingénieur projeteur est parfois amené à se poser l'un des problèmes suivants :

- rechercher, pour une section déterminée, la valeur du plus grand moment que peut équilibrer cette section lorsqu'elle est soumise à un effort normal donné.
- rechercher, pour une section déterminée, la valeur du plus grand effort normal que peut équilibrer cette section lorsqu'elle est soumise à un moment de calcul donné.
- déterminer les sections d'armatures lorsqu'on connait l'effort normal et le moment de calcul.

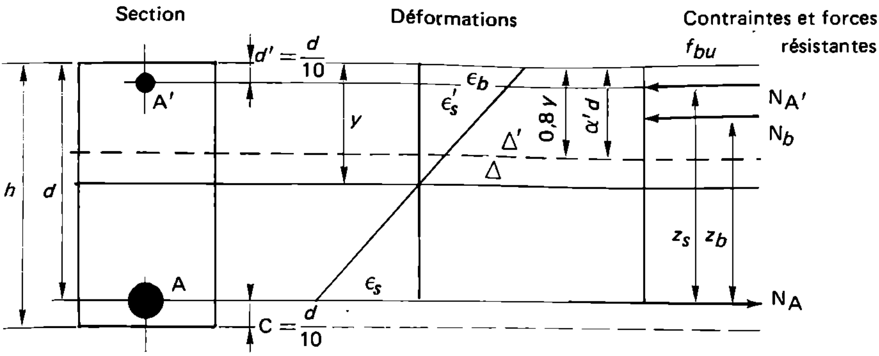
Ces problèmes peuvent se résoudre simplement, en interprétant sur un diagramme les équations d'équilibre, établies pour diverses combinaisons possibles de M_{Gu} et N_{Gu}. Les diagrammes ainsi obtenus pour une nuance d'acier donnée, s'appellent «*diagrammes d'interaction*».

G.6.2. Équations d'équilibre

- Données : b_0, h, A et A′ (et la nuance de l'acier), f_{bu}
- inconnues : M_{Gu} et N_{Gu}.

chaque rapport A/A′ conduit à un diagramme d'interaction différent.

Plaçons-nous, par exemple dans le cas d'une armature symétrique A = A′. On fixe, pour pouvoir effectuer un calcul numérique, un enrobage donné : $c = \frac{d}{10}$ par exemple correspondant à $\frac{h}{d} = 1{,}10$ (valeur courante).



α' est le rapport entre la hauteur du rectangle simplifié (0,8 y) et la distance d :

$$\alpha' = \frac{0{,}8\,y}{d}.$$

il est rappelé que $\alpha = \frac{y}{d}$ on a donc $\alpha' = 0{,}8\,\alpha$

pourcentage géométrique : $\rho = \frac{A}{b_0} d$

pourcentage mécanique : $p = \frac{A}{b_0\,d} \times \frac{f_{su}}{f_{bu}}$

Il est clair que α' est $\leqslant 1{,}10$, la hauteur 0,8 y du diagramme de compression du béton ne pouvant exéder la hauteur de la section ; or $\frac{h}{d} \simeq 1.10$ d'où $\alpha \leqslant 1{,}375$ $\left(\text{car } \alpha = \frac{\alpha'}{0{,}8} \leqslant \frac{1.10}{0{,}8} = 1.375\right)$.

Pour une valeur de α qu'on se donne à priori, on a :

$$N_b = \alpha' \, b_0 \, d f_{bu} \qquad N_A' = A' \sigma_s' \qquad N_a = A\,\sigma_s$$

sans aucun tâtonnement puisque la connaissance de α permet de connaître le pivot et le diagramme des déformations, donc ϵ_s et ϵ_s', d'où σ_s et σ_s' d'après la courbe contrainte-déformation de l'acier utilisé.

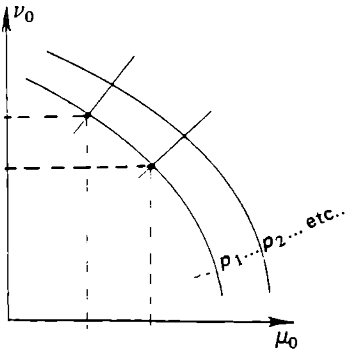
Les équations d'équilibre s'écrivent :

$$\underbrace{N_{Gu}}_{\text{action}} = \underbrace{N_b + N_{A'} - N_A}_{\text{réaction}}$$

ou

$$N_{Gu} = \alpha' \, \mathrm{d}\, b_0 \, f_{bu} + A' \sigma_s' - A\,\sigma_s.$$

Symétrie des armatures : Dans les sections soumises à la flexion composée, il arrive fréquemment que, selon le cas de charge, la face tendue puisse être alternativement d'un côté ou de l'autre, d'où une symétrie nécessaire des armatures ; dans le cas où il y a des armatures comprimées, il faut choisir leur section A' *à priori* ; nous poserons, par exemple, A' = A, et A restera alors la seule inconnue (au lieu de 2 : A' et A).



On peut donc écrire :

$$N_{Gu} = \alpha' \, d \, b_0 \, f_{bu} + A\,(\sigma'_s - \sigma_s)$$

or $$A = p\, b_0\, d \frac{f_{bu}}{f_{su}}$$

(p = pourcentage mécanique)

soit après division par $b_0 \, d \, f_{bu}$:

$$\nu_0 = \frac{N_{Gu}}{b_0 \, d \, f_{bu}}$$

d'où : $$\boxed{\nu_0 = \alpha' + \frac{p}{f_{su}} (\sigma'_s - \sigma_s)}$$

D'autre part, on a :

$$M_{Au} = N_b \, z_b + N_{A'} \, z_s = \alpha' \, b_0 \, d \, f_{bu} \left[d \times \left(1 - \frac{\alpha'}{2}\right)\right] + A' \, \sigma'_s \, z_s$$

car $$z_b = d - \frac{\alpha' d}{2} = d \left(1 - \frac{\alpha'}{2}\right)$$

$$M_{Au} = (b_0 \, d^2 \, f_{bu} \, \alpha') \left(1 - \frac{\alpha'}{2}\right) + A' \, \sigma'_s \, z_s$$

$$z_s = h - 2\,(h - d) = 2\,d - h \; ;$$

si l'on pose $h = 1{,}1\, d$

on a , $z_s = 0{,}9\, d$

soit en divisant par $b_0 \, d^2 \, f_{bu}$

$$\mu_0 = \frac{M_{Au}}{b_0 \, d^2 \, f_{bu}} = \alpha' \left(1 - \frac{\alpha'}{2}\right) + \frac{A' \, \sigma'_s \times 0{,}9\, d}{b_0 \, d^2 \, f_{bu}}$$

or, $$A' = p \, b_0 \, d \frac{f_{bu}}{f_{su}}$$

d'où $$\boxed{\mu_0 = \alpha' \left(1 - \frac{\alpha'}{2}\right) + 0{,}9\, p \frac{\sigma'_s}{f_{su}}}$$

Ces deux valeurs ν_0 et μ_0 sont donc calculables, si l'on se donne les valeurs paramétriques suivantes :

$f_{su} = \frac{f_e}{1{,}15}$ il y aura donc autant d'abaques qu'il y aura de valeurs de f_e considérées.

$p = \frac{p'}{\lambda}$ (en posant $\frac{A'}{A} = \lambda$ avec $\lambda \leqslant 1$) ; il y aura également autant d'abaques qu'il y aura de valeurs $\lambda = \frac{A'}{A}$.

On se donne ensuite des valeurs successives de α' (0,05 ; 0,10 ; 0,15...) à chaque valeur de α' correspond (pour une même valeur des paramètres précédents)

un couple de valeurs de ν_0 et μ_0, coordonnées d'un point faisant partie de la courbe d'interaction $\frac{\mu_0}{\nu_0}$ correspondant aux valeurs paramétriques choisies.

Sur chaque abaque différent sont tracées les courbes $\left(\frac{\mu_0}{\nu_0}\right)$ fonctions de α', chacune d'elles correspondant à une valeur de p donnée ; on obtient ainsi un abaque permettant de déterminer p en fonction de μ_0 et ν_0 et $p' = \lambda\, p$ (ou réciproquement), avec $\lambda = \frac{A'}{A}$.

G.6.3. Abaques ; pratique d'utilisation

Pour la commodité d'usage de ces abaques en flexion composée on les a établis en remplaçant d par h (hauteur totale de la section), ... et en fixant le rapport $\frac{d}{h}$ ou plus exactement le rapport $\frac{d'}{h}$ ou $\frac{h-d}{h}$ ainsi que le rapport $\lambda = \frac{A'}{A}$.

Méthode pratique d'utilisation

Il faut donc calculer tout d'abord :

$$\mu_0 = \frac{M_{Gu}}{b_0\, h^2\, f_{bu}} \quad \text{(Moment réduit)} \qquad \text{(voir nota ci-dessous)}$$

$$\nu_0 = \frac{N_{Gu}}{b_0\, h\, f_{bu}} \quad \text{(Effort normal réduit)}$$

et ensuite se reporter à l'abaque correspondant aux valeurs choisies pour f_e, $\lambda = \frac{A'}{A}$ et $\frac{d'}{h}$.

Cela conduit à un très grand nombre d'abaques possibles basés sur ce principe de l'interaction entre le moment M_{Gu} réduit à μ_0 et l'effort normal N_{Gu} réduit à ν_0. Nous en donnons ci-après une série de 8 pour acier écroui Fe E 40 (nuance très utilisée) avec $\gamma_s = 1{,}15$ d'où $f_{su} = \frac{400}{1{,}15} = 348$ MPa ; quatre valeurs ont été choisies pour le rapport $\lambda = \frac{A'}{A}$: 0,25 ; 0,50 ; 0,75 et 1,00 ; deux valeurs ont été choisies pour $d' = h - d = 0{,}05\, h$ et $0{,}10\, h$ (valeurs les plus usuelles selon que la poutre est plus ou moins haute).

Les courbes correspondent chacune à une valeur de

$$\boxed{p = \frac{A\, f_{su}}{b_0\, h\, f_{bu}}}$$

p = (pourcentage mécanique des armatures tendues A) ; de la valeur de p lue sur l'abaque en fonction de μ_0 et ν_0, on déduit

Nota : les abaques ci-après ont été établies en supposant μ_0 calculé à partir de M_{Gu} (moment total sollicitant par rapport à l'axe G de la section de béton) et non de M_{Au} calculé par rapport à l'axe des armatures les moins comprimées.

$$A = p\, b_0\, h \frac{f_{bu}}{f_{su}} \quad \text{et} \quad A' = \lambda\, A$$

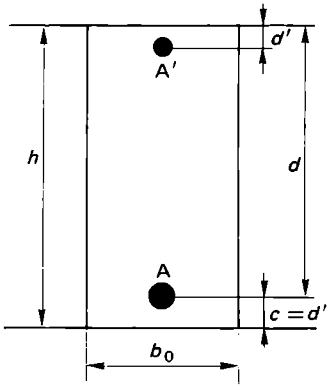
d'après le $\lambda = \frac{A'}{A}$ correspondant à l'abaque).

A remarquer que $\nu_0 = 0$ correspond à la flexion simple et $\mu_0 = 0$ à la compression simple.

Ces abaques établies par le C.A.C.T. (Centre d'Assistance au Calcul Technique de l'U.T.I. 10, rue la Pérouse - 75016 Paris) facilitent grandement le dimensionnement et la vérification des sections rectangulaires travaillant en flexion composée.

Le tableau suivant permet de se reporter à l'abaque correspondant au cas considéré :

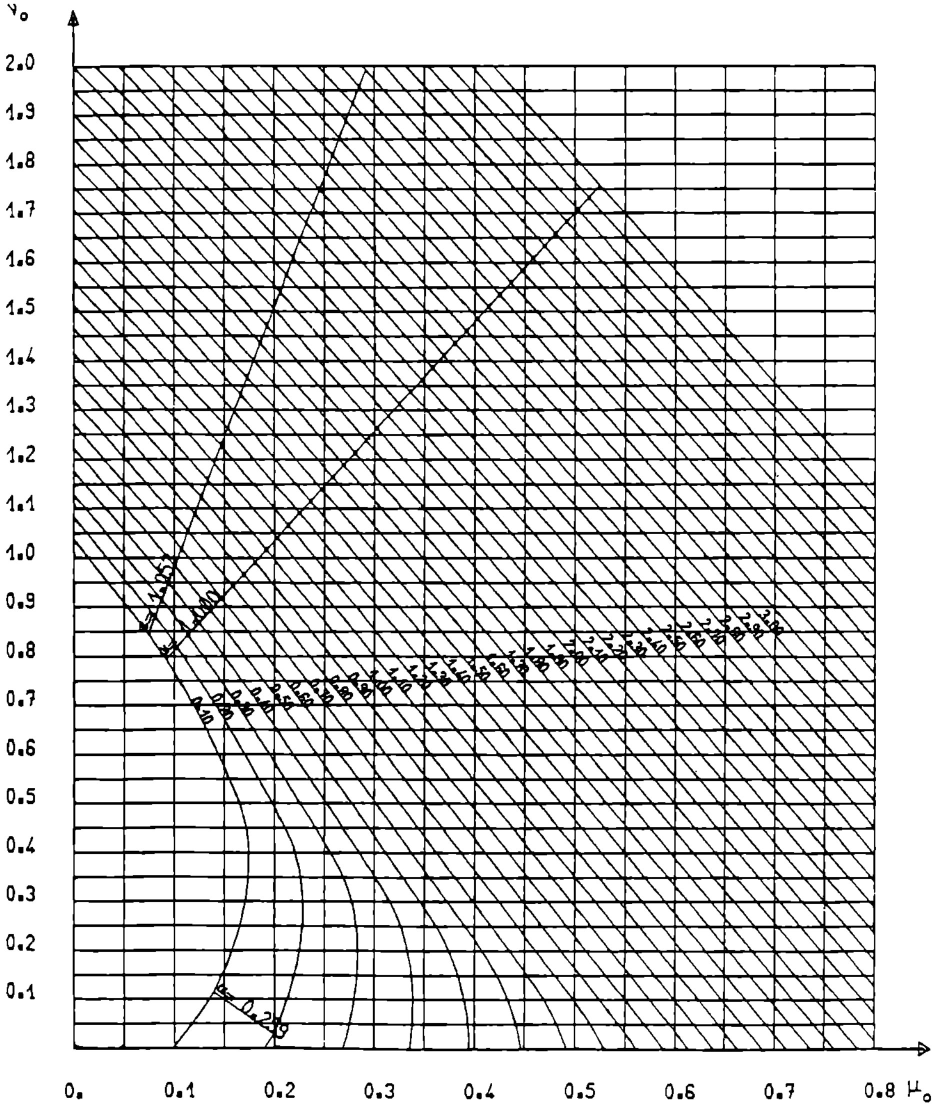
$\frac{d'}{h} = \frac{h-d}{h}$	$\lambda = \frac{A'}{A}$	*Numéros des abaques*
0,05 (cas des sections relativement hautes)	0,25	1
	0,50	2
	0,75	3
	1,00	4
0,10 (cas des sections courantes)	0,25	5
	0,50	6
	0,75	7
	1,00	8



ABAQUE 1.

Calcul du béton à l'état limite ultime
Diagrammes d'intéraction moment-effort normal
Section rectangulaire.

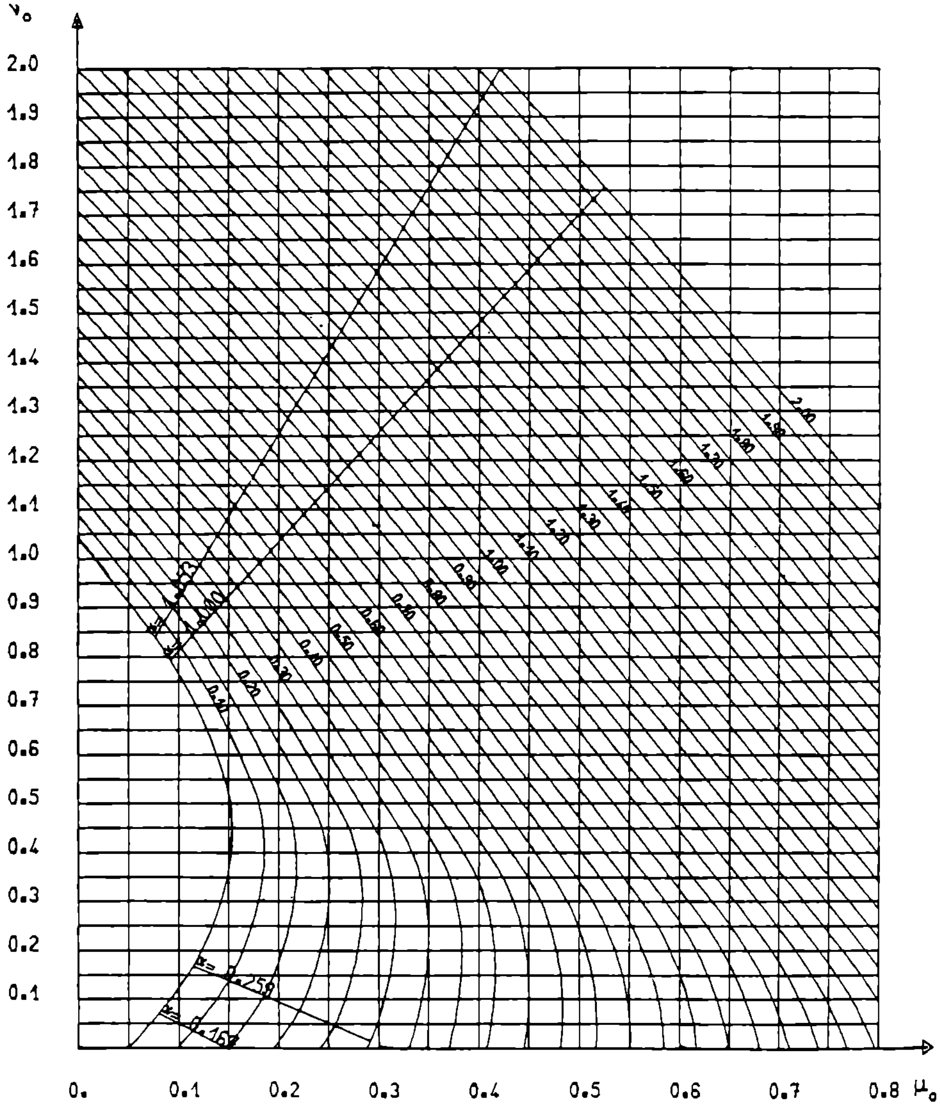
acier écroui
f_e = 400 N/mm²
γ = 1.15
A'/A = 0,25
d' = $h - d = 0.05\,h$



ABAQUE 2.

Calcul du béton à l'état limite ultime
Diagrammes d'intéraction moment-effort normal
Section rectangulaire.

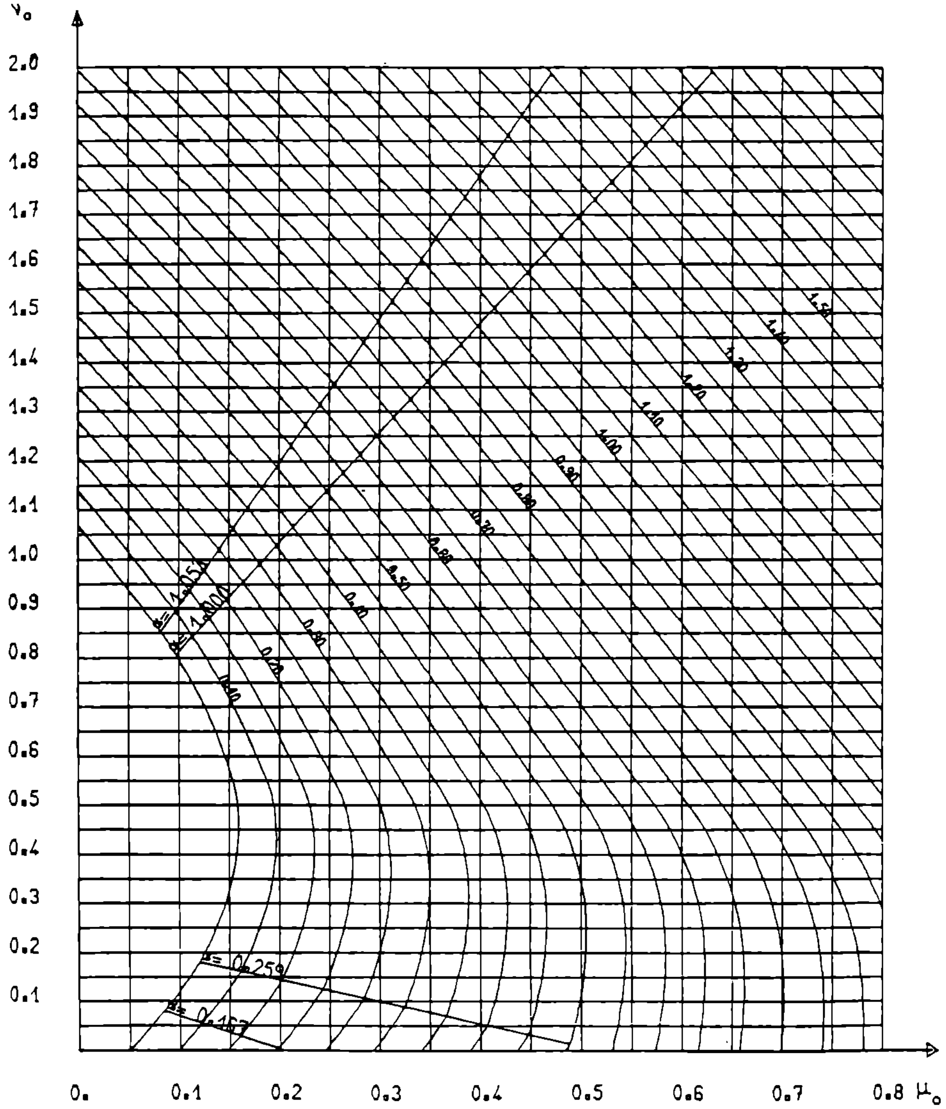
acier écroui
$f_e = 400\ \text{N/mm}^2$
$\gamma = 1.15$
$A'/A = 0.50$
$d' = h - d = 0{,}05\ h$



ABAQUE 3.

Calcul du béton à l'état limite ultime
Diagrammes d'intéraction moment-effort normal
Section rectangulaire.

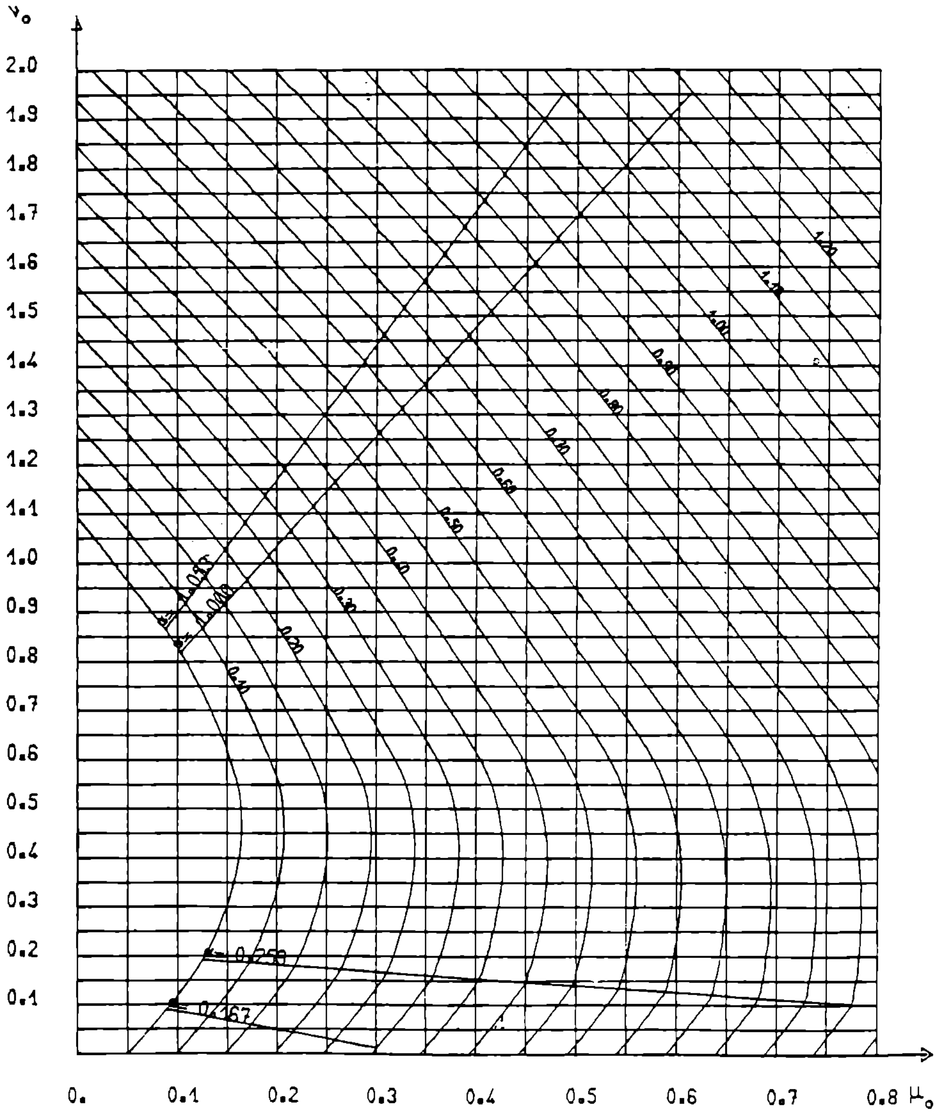
acier écroui
$f_e = 400\ \text{N/mm}^2$
$\gamma = 1.15$
$A'/A = 0.75$
$d' = h - d = 0.05\ h$



ABAQUE 4.

Calcul du béton à l'état limite ultime
Diagrammes d'intéraction moment-effort normal
Section rectangulaire.

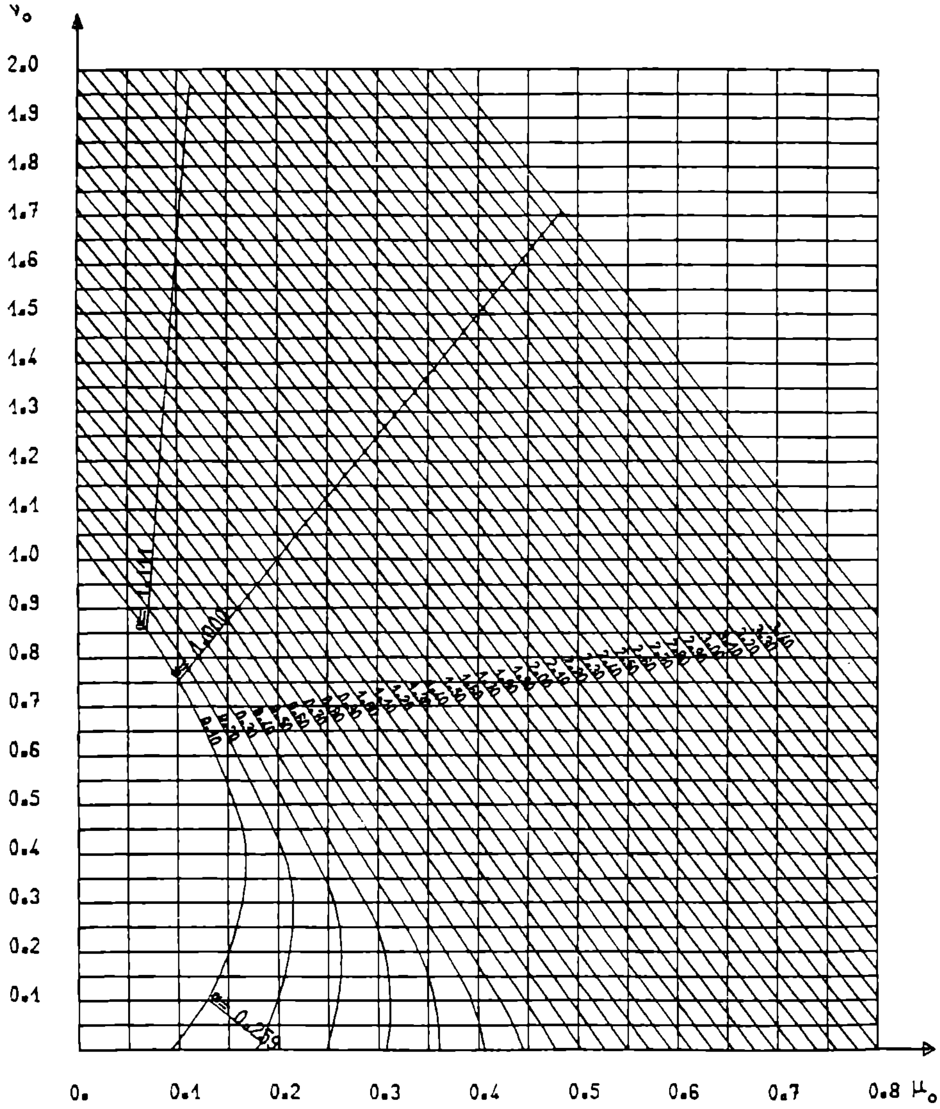
acier écroui
f_e = 400 N/mm^2
γ = 1.15
A'/A = 1.00
d' = $h - d$ = 0,05 h



ABAQUE 5.

Calcul du béton à l'état limite ultime
Diagrammes d'intéraction moment-effort normal
Section rectangulaire.

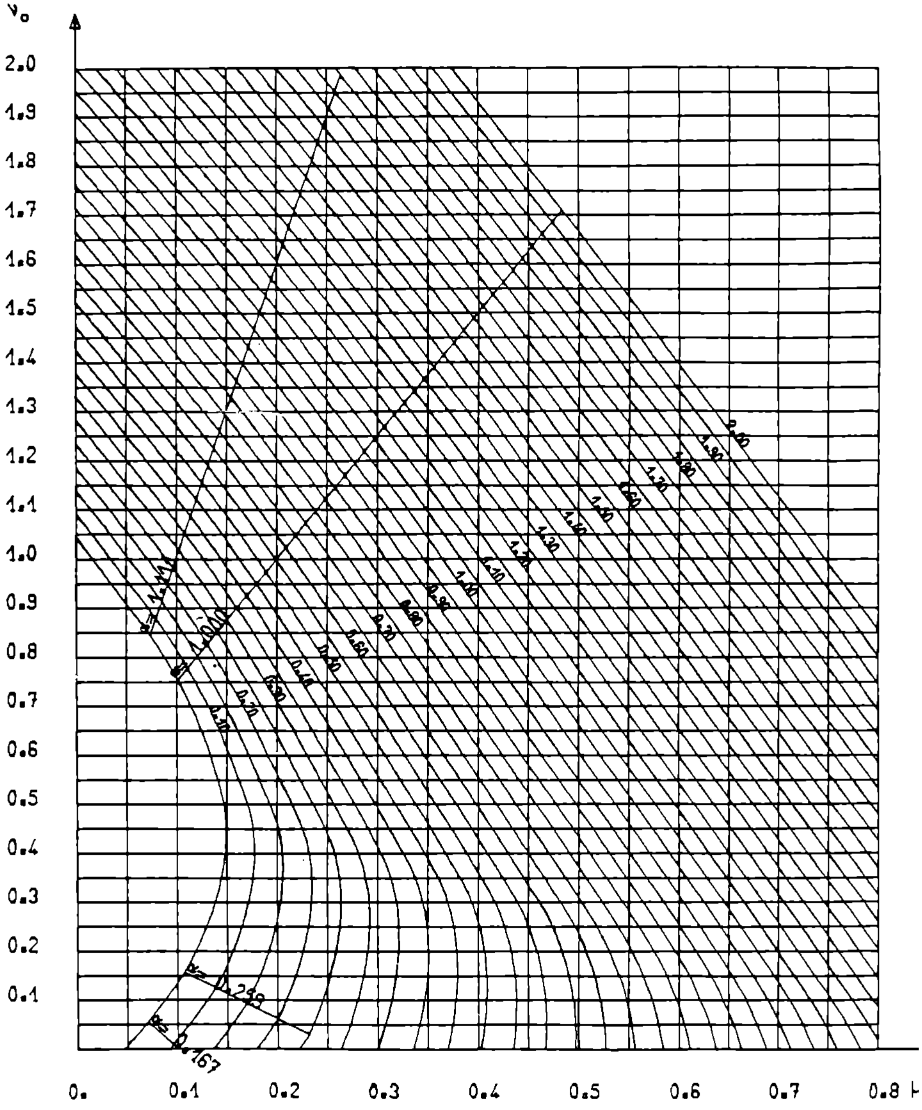
acier écroui
f_e = 400 N/mm^2
γ = 1.15
A'/A = 0.25
$d' = h - d = 0.10\,h$



ABAQUE 6.

Calcul du béton à l'état limite ultime
Diagrammes d'intéraction moment-effort normal
Section rectangulaire.

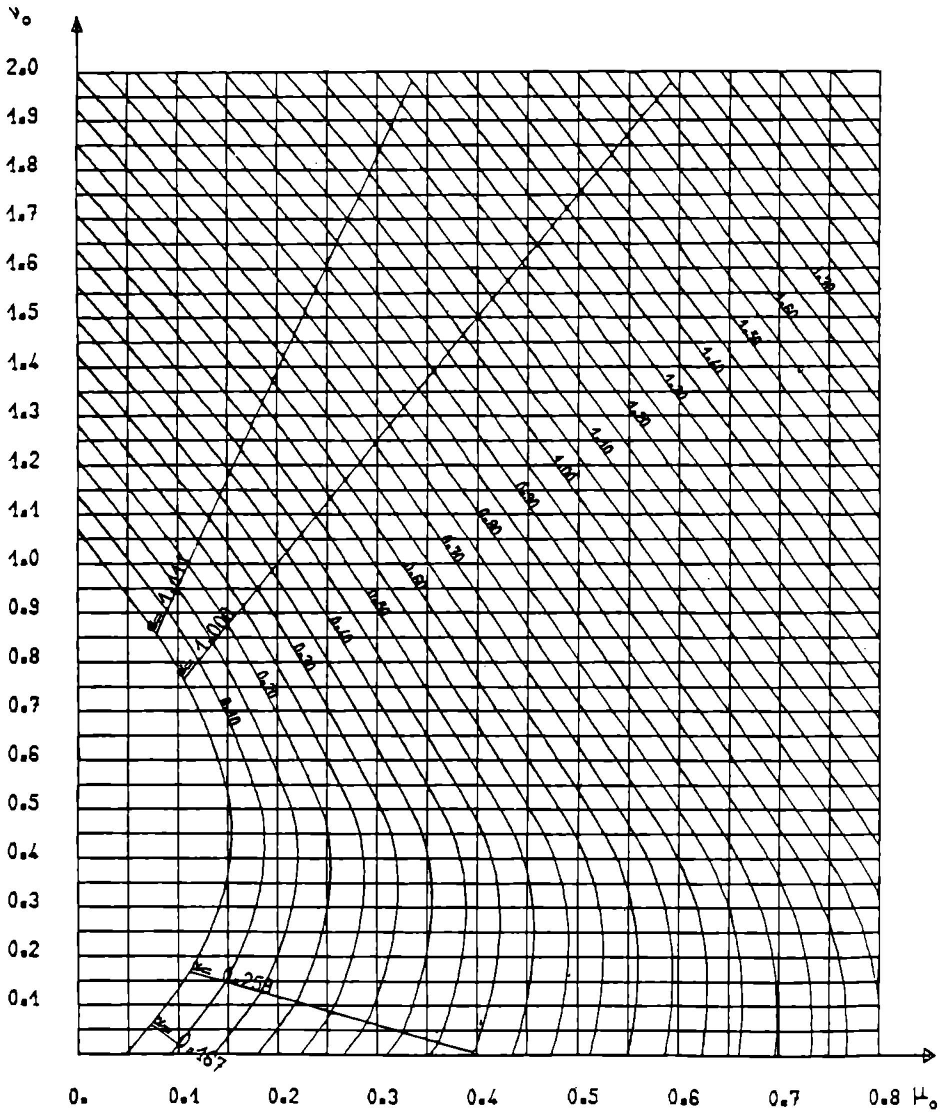
acier écroui
f_e = 400 N/mm^2
γ = 1.15
A'/A = 0.50
$d' = h - d = 0.10\,h$



ABAQUE 7.

Calcul du béton à l'état limite ultime
Diagrammes d'intéraction moment-effort normal
Section rectangulaire.

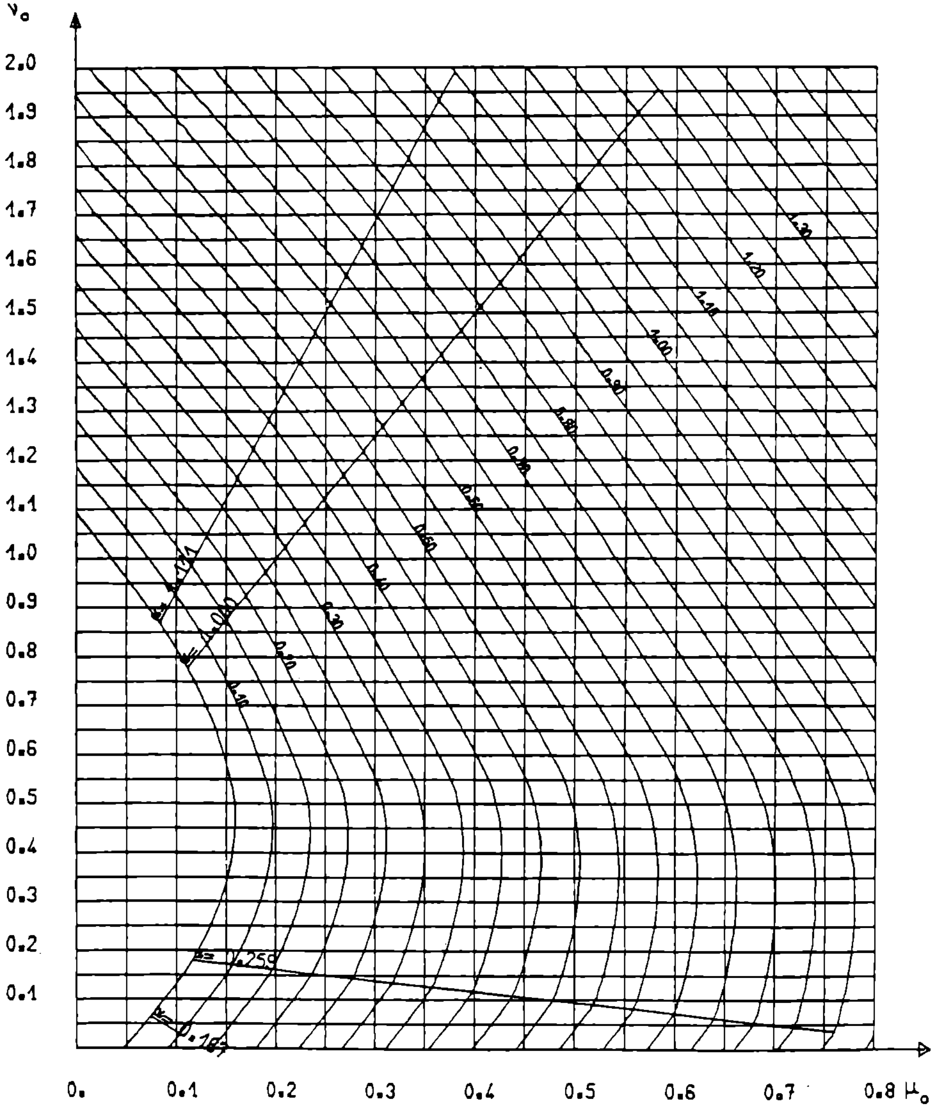
acier écroui
$f_e = 400\ \text{N/mm}^2$
$\gamma = 1.15$
$A'/A = 0.75$
$d' = h - d = 0.10\,h$



ABAQUE 8.

Calcul du béton à l'état limite ultime
Diagrammes d'intéraction moment-effort normal
Section rectangulaire.

acier écroui
f_e = 400 N/mm^2
γ = 1.15
A'/A = 1.00
$d' = h - d = 0.10\,h$



G.6.4. Exemples de calculs par abaques

Reprenons la section calculée en G.5.2, dans le cas A = A'.

$A = A' = 4\ \phi\ 20 + 1\ \phi\ 25 = 1748\ mm^2$

$= 1748\ 10^{-6}\ m^2$

$\frac{c}{d} = \frac{d'}{d} = 0{,}10$

$M_{Gu} = 500\ kN.m = 500\ 10^{-3}\ MN.m$

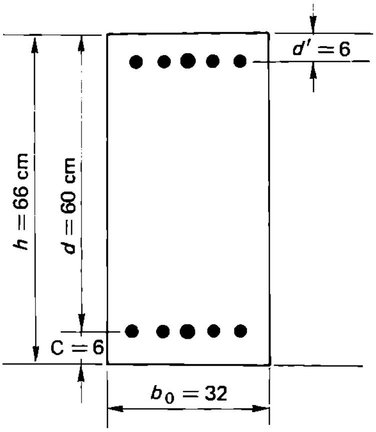
$N_{Gu} = 800\ kN = 800\ 10^{-3}\ MN$

Acier du type 2, Fe E 40

$f_{su} = \frac{f_e}{1{,}15} = \frac{400}{1{,}15} = 348\ MPa$

Béton $f_{c28} = 20\ MPa$

$f_{bu} = \frac{0{,}85\, f_{c28}}{1{,}50} = 11{,}5\ MPa$



Calculons :

$$\mu_0 = \frac{M_{Gu}}{b_0\, h^2 f_{bu}} = \frac{500\ 10^{-3}}{0{,}32\ (0{,}66)^2 \times 11{,}5} = 0{,}312$$

$$\nu_0 = \frac{N_{Gu}}{b_0\, h\, f_{bu}} = \frac{800\ 10^{-3}}{0{,}32 \times 0{,}66 \times 11{,}5} = 0{,}329$$

L'abaque n° 8 donne pour ces valeurs de μ_0 et ν_0 : $p = 0{,}26$ d'où $A = p\ b_0\ h \frac{f_{bu}}{f_{su}}$

Mais dans ce cas $\frac{d'}{h} = 0{,}09$ et non 0,10. Il convient donc d'interpoler entre cet abaque n° 8 et l'abaque n° 4 ($d' = 0{,}05\ h$) sur lequel on lit $p = 0{,}22$; pour $d' = 0{,}09\ h$ on a donc $p = 0{,}22 + (0{,}26 - 0{,}22)\frac{9-5}{10-5} = 0{,}25$; on a alors :

$$A = \frac{0{,}25 \times 0{,}32 \times 0{,}66 \times 11{,}5}{348} = 1745\ 10^{-6}\ m^2 \quad \text{soit} \quad 1745\ mm^2$$

et l'on aboutit au même ferraillage : $4\ \phi\ 20 + 1\ \phi\ 25 = 1748\ mm^2$.

Inversement : on peut calculer, pour cette même section, l'effort normal ultime dans le cas où le moment ultime serait moindre et passerait, par exemple, de 500 à 350 kN.m ; on aurait alors :

$$\mu_0 = \frac{350\ 10^{-3}}{0{,}32 \times 0{,}66^2 \times 11{,}5} = 0{,}219$$

Sur la courbe $p = 0{,}26$, on lit $\nu_0 = 0{,}89$

d'où $N_{Gu} = 0{,}89 \times 0{,}32 \times 0{,}66 \times 11{,}5 = 2{,}16\ MN = 2160\ kN$ (au lieu de 800)

G.6.5. Remarque importante :

Si l'on suppose qu'est maintenu le même moment M_{Gu} mais que l'effort normal N_{Gu} est supprimé, il faut se garder de penser que la sécurité reste assurée *à fortiori* ; en effet, on aura toujours $\mu_0 = 0{,}312$ mais $\nu_0 = 0$ et le pourcentage d'acier devrait alors passer de $p = 0{,}26$ à $p = 0{,}35$. Cela met bien en évidence l'interaction de l'effort normal et du moment fléchissant.

Si d'onc l'effort normal n'est pas permanent et constant (charges variables), il sera nécessaire de considérer *les 2 cas :*

1er cas : valeur maximale de N_{Gu}

2è cas : valeur minimale de N_{Gu}

avec leur influence sur la valeur de M_{Gu} ; cela conduira à une valeur minimale et une maximale pour p et l'on adoptera évidemment la valeur de p maximale.

G.6.6. Section entièrement tendue : cas d'un tirant fléchi

La section peut être entièrement tendue lorsque l'effort normal appliqué N_u est une traction et que son centre d'application se trouve entre les 2 nappes d'armatures. C'est le cas, par exemple, d'un tirant fléchi soumis à un moment M_u modéré (sous son poids propre, par exemple) et en plus d'un effort normal de traction N_u centré en C à un excentrement e (par exemple).

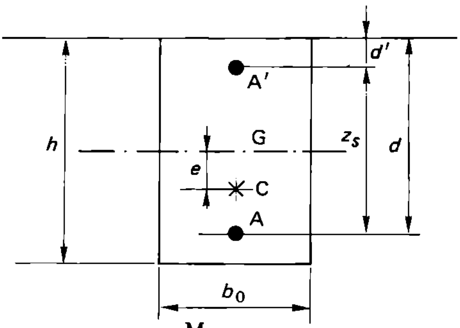
On calcule M_{Au} (moment ramené au niveau des aciers inférieurs A).

On a $M_{Gu} = M_u + e\, N_u$ (e est pris négatif s'il est dirigé vers A), et

$N_{Gu} = N_u$ ramené au centre de gravité G

d'où $M_{Au} = M_{Gu} + N_{Gu}\left(d - \frac{h}{2}\right)$

Il est rappelé que N_u est négatif (traction).



On a $z_s = d - d'$ d'où $F_{A'} = \dfrac{M_{Au}}{d - d'}$.

Il faut d'abord $A' \geqslant \dfrac{M_{Au}}{f_{su}\,(d - d')}$

et $A \geqslant \frac{1}{f_{su}}\left(N_u - \frac{M_{Au}}{d - d'}\right)$ car, en effet $F_{A'} + F_A = N_u$ soit $F_A = N_u - \frac{M_{Au}}{\alpha - d'}$

d'où $A \geqslant \frac{F_A}{f_{su}}$.

Il faudra de plus satisfaire la condition de non fragilité (chap. A.8) :

$$A + A' \geqslant B\frac{f_{t28}}{f_e}$$

($f_{t28} = 0{,}6 + 0{,}06 f_{c28}$ § A.3.1.b).

Dans le cas où N_u n'est pas très élevé, on tend vers la flexion simple et la condition de non fragilité s'écrit :

valeur minimale de A (ou A') $\geqslant 0{,}23\, b_0\, d \frac{f_{t28}}{f_e}$ (chap. A.8).

CHAPITRE G.7

CAS DES POTEAUX EN COMPRESSION EXCENTRÉE STABILITÉ DE FORME

L'article A4.3.5* du B.A.E.L. 80 est complètement modifié ; nous en donnons ci-après la nouvelle rédaction dans le BAEL 83 :

Dans ce qui suit on utilise les notations suivantes :

l_f, la longueur de flambement de la pièce.

l, la longueur de la pièce.

h, la hauteur totale de la section dans la direction du flambement.

e_1, l'excentricité (dite du premier ordre) de la résultante des contraintes normales, avant application des excentricités additionnelles définies ci-après.

e_a, l'excentricité additionnelle traduisant les imperfections géométriques initiales (après exécution).

e_2, l'excentricité due aux effets du second ordre, liés à la déformation de la structure.

Les sections soumises à un effort normal de compression sont justifiées vis-à-vis de l'état limite ultime de stabilité de forme conformément à l'art. A.4.4* en adoptant une excentricité totale de calcul : $e = e_1 + e_a + e_2$.

Cependant il est possible de tenir compte des effets du second ordre de façon forfaitaire lorsque le rapport $\frac{l_f}{h}$ est inférieur à la plus grande des deux valeurs 15 et $20\ \frac{e_1}{h}$. Pour ce faire on procède aux justifications habituelles** complétées comme suit :

e_a = la plus grande des deux valeurs 2 cm et $l/250$***

$e_2 = \frac{3\, l^2_f}{10^4\, h}(2 + \alpha\, \phi)$ expression dans laquelle on désigne par :

α = le rapport du moment du premier ordre dû aux charges permanentes et quasi-permanentes au moment total du premier ordre, ces moments étant pris avant application des coefficients γ définis en A.3.3.****

ϕ = le rapport, de la déformation finale due au fluage, à la déformation instantanée sous la charge considérée ; ce rapport est généralement pris égal à 2.

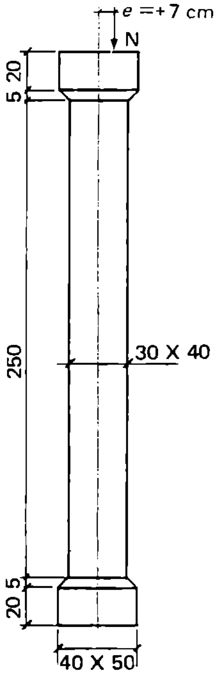
CHAPITRE G.8

POTEAU EXPÉRIMENTAL EN COMPRESSION EXCENTRÉE

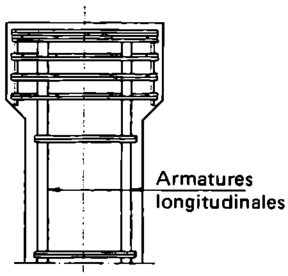
Ce poteau fait partie d'une série essayée au Centre d'Essais des Structures de St-Rémy-les-Chevreuse.

Caractéristiques :

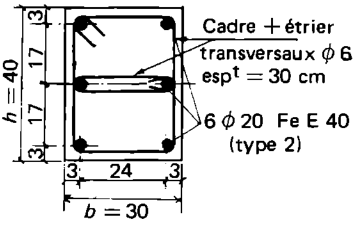
Hauteur : 3,00 m ; articulé aux deux extrémités (plateaux de la presse articulés) ; résistance réelle du béton à 28 jours (jour de l'essai) : f_c = 28,4 MPa ; charge de rupture : 230 t.



Détail de ferraillage d'une tête



Coupe en section courante



$$A = A' = 3\ \phi\ 20\ \text{HA} = 942\ \text{mm}^2 = 942\ 10^{-6}\ \text{m}^2$$

Acier écroui Fe 40

$$d' = h - d = 3\ \text{cm} \quad \text{d'où} \quad \frac{d'}{h} = \frac{h-d}{h} = 0{,}10.$$

Pourcentage mécanique : $p = \dfrac{A}{b_0\,h}\ \dfrac{f_{su}}{f_{bu}}$

La résistance moyenne du béton est de $f_{cj} = 28{,}4$ MPa mais avec une dispersion pratiquement négligeable, c'est donc, en pratique, la résistance réelle du béton ; mais pour calculer la charge de service admissible (avec excentrement de 7 cm) il convient de se baser sur la résistance caractéristique $f_{cj} = \overline{f_{cj}} - 1{,}2s$ ou, si l'on n'a que trois éprouvettes, ce qui était le cas,

$$f_{cj} = \overline{f_{cj}} - 2{,}7 = 28{,}4 - 2{,}7 = 25{,}7\ \text{MPa}$$

d'où $$f_{bu} = \frac{0{,}85 \times 25{,}7}{1{,}5} = 14{,}6\ \text{MPa}$$

$$f_{su} = \frac{400}{1{,}15} = 348\ \text{MPa}$$

On a donc $$p = \frac{942\ 10^{-6}}{0{,}40 \times 0{,}30} \times \frac{348}{14{,}6} = 0{,}19$$

Calcul de coefficient de stabilité de forme

Élancement $\lambda = \dfrac{l_f}{i}$

$l_f = 3{,}00$ m (articulation à chaque extrémité)

$$i = \frac{b}{2\sqrt{3}} = \frac{30}{2\sqrt{3}} = 8{,}7\ \text{cm}$$

d'où $\lambda = \dfrac{300}{8{,}7} = 34{,}5 < 50 \qquad e = +7\ \text{cm} \qquad h = 30\ \text{cm}$

Excentricité totale de calcul (chap. G7) : $e = e_1 + e_a + e_2$

$$e_1 = 7\ \text{cm} \qquad e_a = 2\ \text{cm} \qquad e_2 = \frac{3\,l^2_f}{10^4\,h}\,(2 + \alpha\phi) \qquad \alpha = \frac{M_G}{M_{G+Q}} \simeq 0$$

d'où $$e_2 = \frac{3 \times 300^2}{10^4 \times 30} \times 2 = 1{,}8\ \text{cm}.$$

On a donc : $M_{Gu} = (0{,}07 + 0{,}02 + 0{,}018)\,N_u = 0{,}108\,N_u$.

$$\mu_0 = \frac{M_{Gu}}{b_0\,h^2\,f_{bu}} = \frac{0{,}108\,N_u}{0{,}40 \times 0{,}30^2 \times 14{,}6} = 0{,}205\,N_u$$

$$\nu_0 = \frac{1{,}20\,N_u}{0{,}40 \times 0{,}30 \times 14{,}6} = 0{,}685\,N_u \ \text{(unités : m, MN et MPa)}$$

$$\frac{\nu_0}{\mu_0} = \frac{0{,}685}{0{,}205} = 3{,}34.$$

Sur l'abaque n° 8, il faut suivre la courbe $p = 0{,}19$ et trouver pour ν_0 et μ_0 des valeurs dans le rapport 3,34.

On trouve : $\nu_0 = 0{,}74$ et $\mu_0 = 0{,}22$.

Ce qui donne bien : $\dfrac{\nu_0}{\mu_0} = \dfrac{0{,}74}{0{,}22} = 3{,}36\ (\simeq 3{,}34)$

d'où $N_u = \dfrac{\nu_0}{0{,}685} = \dfrac{0{,}74}{0{,}685} = 1{,}080\ \text{MN} = 1080\ \text{kN}$

Par rapport à μ_0, on aurait $N_u = \dfrac{\mu_0}{0{,}205} = \dfrac{0{,}22}{0{,}205} = 1{,}073\ \text{MN}$.

Les résultats sont donc cohérents.

On a $N_u = 1{,}5\ N$ d'ou l'effort normal de service

$$N = \frac{1080}{1{,}5} = 720\ \text{kN}\ (\sim 74\ \text{t}).$$

Évaluation de la charge de rupture N_R

Nous n'allons prendre aucun coefficient de sécurité sur les matériaux :

Nous remplacerons $f_{bu} = 14{,}6$ par $f_{cj} = 28{,}4$ MPa et $f_{su} = 348$ par f_e réelle $= 440$ MPa (résultat d'essai).

On a donc $p = \dfrac{942\ 10^{-6}}{0{,}40 \times 0{,}30} \times \dfrac{440}{28{,}4} = 0{,}122.$

La charge étant parfaitement centrée à 7 cm de l'axe du poteau, nous n'ajouterons pas l'excentrement supplémentaire de 2 cm.

Toutefois, nous appliquerons le coefficient d'instabilité de forme $\delta = 1{,}20$, car cette instabilité existe effectivement surtout lorsque l'on pousse jusqu'à la rupture.

$$M_{GR} = 1{,}20 \times (0{,}07\ N_R) = 0{,}084\ N_R$$

$$\mu_0 = \frac{0{,}084\ N_R}{0{,}40 \times 0{,}30^2 \times 28{,}4} = 0{,}082\ N_R$$

$$\nu_0 = \frac{1{,}20\ N_R}{0{,}40 \times 0{,}30 \times 28{,}4} = 0{,}352\ N_R$$

On trouve $\dfrac{\nu_0}{\mu_0} = \dfrac{0{,}352}{0{,}82} = 4{,}29$

Sur la courbe $p = 0{,}122$ on trouve $\mu_0 = 0{,}17$ pour $\nu_0 = 0{,}73$.

Soit $\dfrac{\nu_0}{\mu_0} = \dfrac{0{,}73}{0{,}17} = 4{,}29$

d'où $N_R = \dfrac{0{,}73}{0{,}352} = 2{,}07\ \text{MN}$

ou $N_R = \dfrac{0{,}17}{0{,}082} = 2{,}07\ \text{MN}$

} Résultats parfaitement cohérents.

soit $N_R = 2070\ \text{kN} \simeq 211$ t.

La charge de rupture a été de 230 t ; la correspondance est bonne car, en général, les résultats des calculs et des essais ne coïncident qu'à ± 10 % près.

Coefficient de sécurité : $\dfrac{\text{charge de rupture}}{\text{charge de service}} = \dfrac{230}{74} = 3{,}1.$

Il est apparemment assez confortable par rapport à celui des poutres en flexion (2 à 2,5 en général), mais la charge de rupture, ici mesurée, a été réalisée en chargement pratiquement instantané ; mais, dans un chargement de longue durée le phénomène de fluage serait intervenu et aurait favorisé l'instabilité de forme ; la rupture serait alors intervenue sous une charge probablement inférieure à 230 t.

CHAPITRE G.9

FLEXION COMPOSÉE ETAT-LIMITE DE SERVICE

G.9.1. Remarques :

A l'état limite de service, l'excentricité de 2e ordre e_2 et l'excentricité additionnelle e_a (chap. G.7) n'ont pas à être pris en compte.

Le processus de calcul ci-après dans le plan de flexion, n'exclut pas la nécessité d'une vérification éventuelle au flambement hors du plan de flexion ; en effet, dans le plan de flexion interviennent les sollicitations M_G et N_G (ramenées au centre de gravité G) ; mais la charge N_G centrée en G peut, éventuellement, à elle seule conduire à une rupture par flambement suivant l'autre direction, surtout, si, dans ce sens la dimension de la section est relativement faible ; d'où la nécessité d'une vérification dans cet autre sens et à l'E.L.U. conformément aux prescriptions du Module F précédent.

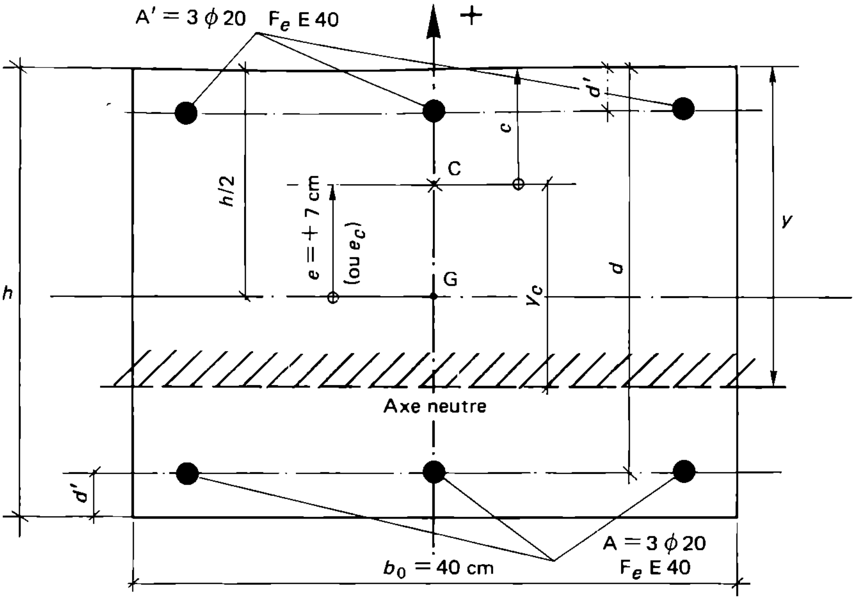
Nota - il est rappelé que le calcul à l'état limite de service n'est exigé que si la fissuration est préjudiciable ou très préjudiciable (voir § A.3.2.f).

G.9.2. Notations - Orientation

$\dot{N}$ = effort normal de *service.*

L'effort normal N (+ si compression et − si traction) est appliqué à l'excentrement e (+ vers le haut − vers le bas) ; sur une section horizontale + à droite et − à gauche car les moments sont comptés + dans le sens des aiguilles d'une montre).

Si la section subit, de plus, un moment fléchissant M_G (calculé par rapport à l'axe passant par le centre de gravité G) le point C devient alors le «centre de pression» sur la section (moment M_G compris) et l'excentrement de C est alors e_c tel que $e_c \times N = e \times N + M_G$ soit $e_c = e + \frac{M_G}{N}$.



Cas du poteau traité au chap. G.8.

C tombant en dehors du noyau central $\left(\frac{1}{3}\text{ central}\right)$ la section n'est que partiellement comprimée, sur la hauteur y

c = distance de la fibre la plus comprimée au centre de pression C ($c > 0$ si C en dessous et $c < 0$ si C en dessus). Dans le cas de la figure c est > 0 $c = +8$ cm.

On a donc $y = y_c + c$.

G.9.3. Position de la fibre neutre

y_c est racine de l'équation

$$y_c^3 + p\,y_c + q = 0$$

avec $$p = -3\,c^2 - \frac{90\text{ A}'}{b_0}(c - d') + \frac{90\text{ A}}{b_0}(d - c)$$

et $$q = -2\,c^3 - \frac{90\text{ A}'}{b_0}(c - d')^2 - \frac{90\text{ A}}{b_0}(d - c)^2$$

$6\,n = 6 \times 15 = 90$

Pour trouver la valeur de y_c le plus simple est de procéder par approximation successive de valeurs de y_c pour annuler l'expression

$$y_c\,(y_c^2 + p) + q = 0$$

de la valeur de y_c on déduit (c pris avec son signe).

$$\boxed{y = y_c + c}\,.$$

G.9.4. Calcul des contraintes

Béton sur la fibre la plus comprimée :

$$\sigma_b = \frac{(N y_c)}{I} y.$$

Aciers tendus : $\sigma_s = 15 \frac{(N y_c)}{I}(d-y)$

Aciers comprimés : $\sigma'_s = 15 \frac{(N y_c)}{I}(y - d').$

Ces contraintes doivent satisfaire aux valeurs limites à l'E.L.S. (A.3.2.f).

Nous rappelons que :

$$I = \frac{b_0 y^3}{3} + 15 A' (y - d')^2 + 15 A (d - y)^2.$$

Si les contraintes dépassent les valeurs limites il faut réduire la valeur de N (valeur de service) en conséquence.

Premier exemple : Poteau expérimental (chap. G.8).

$A = A' = 3 \phi 20 (F_e E40) = 942\ 10^{-6}\ m^2$ $\quad d = 0{,}27$ m

$b_0 = 0{,}40$ m $\quad d' = 0{,}03$ m $\quad c = +0{,}08$ m.

Coefficient de l'équation du 3e degré en y_c (en cm)

$$p = -3 \times 8^2 - \frac{90 \times 9{,}42}{40}(8-3) + \frac{90 \times 9{,}42}{40}(27-8) = +105$$

$$q = -2 \times 8^3 - \frac{90 \times 9{,}42}{40}(8-3)^2 - \frac{90 \times 9{,}42}{40}(27-8)^2 = -9207.$$

y_c est solution de l'équation :

$$y_c (y_c^2 + 105) = 9207$$

par approximation on trouve $y_c = 19{,}3$ cm d'où

$$y = y_c + c = 19{,}3 + 8 = 27{,}3 \text{ cm}$$

$$I = \frac{40 \times 27{,}3^3}{3} + 15 \times 9{,}42 (27{,}3 - 3)^2 + 15 \times 9{,}42 (27 - 27{,}3)^2.$$

Remarque sur $d - y = -0{,}3$ cm : cela signifie que l'axe des armatures coté traction tombe en réalité dans la zone comprimée à 3 mm au-dessus de la fibre neutre. Cela est dû au fait que le centre de pression est situé à une faible distance au-delà du noyau central (7 – 5 = 2 cm).

On trouve $\quad I = 354 \cdot 735\ cm^4 = 3{,}547\ 10^{-3}\ m^4.$

Contraintes : $\sigma_b = \frac{N y_c}{I} y = N \frac{0{,}193 \times 0{,}273}{3{,}547\ 10^{-3}} = 14{,}85\ N$

(N = effort normal maximal à déterminer).

il faut $\sigma_b \leqslant 0{,}6 f_{cj} = 0{,}6 \times 25{,}7 = 15{,}42$

d'où $14{,}85\ N \leqslant 15{,}42 \qquad N \leqslant \frac{15{,}42}{14{,}85} = 1{,}04$ MN.

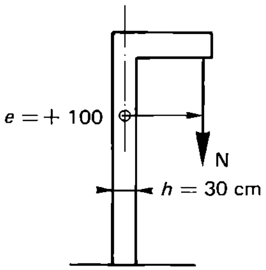
La compression du béton limite donc la charge N (à l'état limite de service) à 1040 KN.

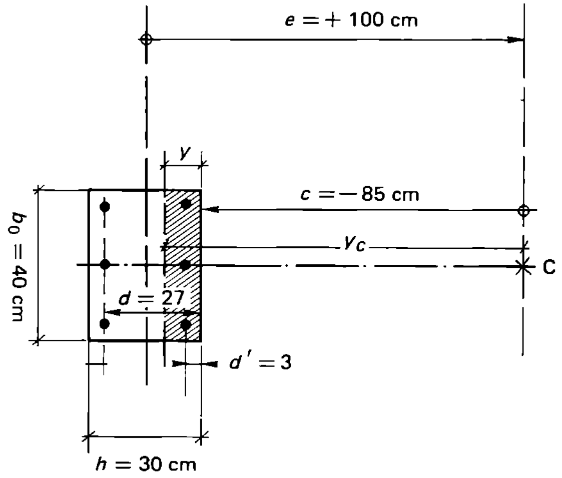
σ_s (aciers tendus) est pratiquement nulle, car ces aciers sont tout près de la fibre neutre.

Dans ce cas particulier c'est donc l'état limite ultime qui limite la charge à 720 KN.

Deuxième exemple :

Considérons le même poteau mais avec une partie en console permettant de porter l'excentrement de la charge N de 7 cm à 1 m.





Le calcul serait le même si la section avait à supporter une charge identique *N centrée* avec, de plus, un moment fléchissant $M_G = N \times e = N \times 1$m.

Avec la nouvelle valeur de $c = -85$ cm on trouve :

$$p = -17 \cdot 435 \quad \text{et} \quad q = +798 \cdot 144$$

et l'équation $y_c\,(y_c^2 - 17435) = -798 \cdot 144$ donne $y_c = 95$ cm

$$y = y_c + c = 95 - 85 = 10 \text{ cm}$$

d'où $I = 61093\ \text{cm}^4 = 0{,}611\ 10^{-3}\ \text{m}^4.$

Contraintes : $\sigma_b = \frac{N y_c}{I} y = N \frac{0{,}95 \times 0{,}10}{0{,}611\ 10^{-3}} = 155{,}5\ \mathrm{N}$

$\sigma_b \leqslant 0{,}60 f_{cj} = 15{,}42\ \mathrm{MPa}$ donne $\mathrm{N} \leqslant \frac{15{,}42}{155{,}5} = 0{,}099\ \mathrm{MN} = 99\ \mathrm{KN}$

σ_s (aciers tendus) $= 15 \frac{\mathrm{N}\, y_c}{\mathrm{I}} (d - y) = 3965\ \mathrm{N}$

a) **Fissuration préjudiciable** $\sigma_s \leqslant 150\ \eta = 240\ \mathrm{MPa}$

soit $3965\ \mathrm{N} \leqslant 240 \rightarrow \mathrm{N} \leqslant \frac{240}{3965} = 60{,}5\ 10^{-3}\ \mathrm{MN} = 60{,}5\ \mathrm{KN}$

b) **Fissuration très préjudiciable** $\sigma_s \leqslant 110\ \eta = 176\ \mathrm{MPa}$

soit $3965\ \mathrm{N} \leqslant 176 \rightarrow \mathrm{N} \leqslant 44{,}4 10^{-3}\ \mathrm{MN} = 44{,}4\ \mathrm{KN}$.

Dans ce deuxième exemple c'est donc la contrainte de traction dans les aciers qui limite la charge de service et non la compression du béton comme dans le premier exemple.

MODULE H - POUTRES HYPERSTATIQUES

CHAPITRE H.1

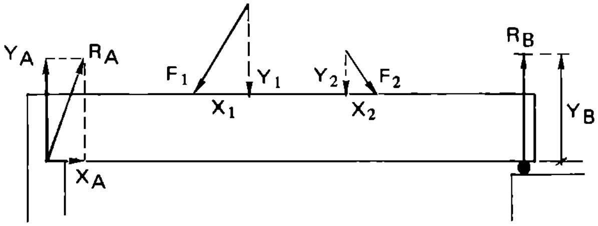
DÉFINITION

Il arrive fréquemment dans les structures (de bâtiments en particulier) que les poutres soient continues sur plusieurs appuis (poteaux) ; elles constituent alors un *système hyperstatique.*

Nous rappelons que lorsqu'un élément de structure est soumis à l'action d'un système de force coplanaires F_i (actions connues et réactions d'équilibre à déterminer) les conditions d'équilibre de cet élément s'écrivent à l'aide des trois équations classiques de la statique

$$M^t(F_i) = 0$$
$$\Sigma X_i = 0$$
$$\Sigma Y_i = 0$$

X_i et Y_i étant les projections de chaque force F_i dans un système d'axes XY.



- Si le calcul des réactions d'appuis comporte trois inconnues, ce système d'équation admet une solution unique et la structure est dite «*isostatique*» (c'est le cas des poutres à une travée sur appuis simples, des consoles, etc...)

- Si il comporte plus de trois inconnues, le problème est alors indéterminé (à partir de ce seul système des trois équations) et on a affaire à une structure dite «*hyperstatique*».

La théorie de la résistance des matériaux permet alors de lever l'indétermination en écrivant des relations supplémentaires entre les déformations de l'élément (rotation sur appuis par exemple) et les forces sollicitantes.

Les systèmes hyperstatiques sont nombreux : cadres, portiques, poutres encastrées, poutres continues, etc...

Ils ne présentent pas de difficultés particulières en ce qui concerne les calculs de béton armé, dès lors, (et c'est là le problème) où on a pu déterminer les réactions d'appuis, les moments fléchissants et les efforts tranchants à partir desquels on applique les calculs exposés dans les modules précédents.

Dans une grande partie des cas (les plus usuels) les calculs théoriques ont abouti à des formules permettant le calcul direct des réactions d'appuis, moments fléchissants, efforts tranchants et flèches. Nous citons ci-après à titre d'exemple, le cas particulier des poutres encastrées.

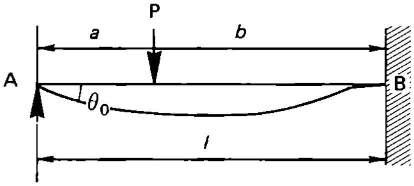
CHAPITRE H.2

CAS PARTICULIERS DES POUTRES ENCASTRÉES A UNE OU DEUX EXTRÉMITÉS

Les documents suivants sont extraits du formulaire du béton armé, Tome II par COURTAND et LEBELLE.

H.2.1. Poutre encastrée à l'une de ses extrémités et libre à l'autre

a) Charge concentrée



Réactions, efforts tranchants, moments

$$A = \frac{P\,(l - a^2)\,(2\,l + a)}{2\,l^3}$$

$$B = \frac{P a\,(3\,l^2 - a^2)}{2\,l^3}$$

$$M_B = \frac{P a\,(l^2 - a^2)}{2\,l^2} \qquad M_{B\,max} = 0{,}192\,P\,l \text{ pour } a = \frac{l}{\sqrt{3}}$$

$0 < x < a$

$$T = \frac{P\,(l - a)^2\,(2\,l + a)}{2\,l^3} \qquad M = \frac{P\,(l - a)^2\,(2\,l + a)\,x}{2\,l^3}$$

$a < x < l$

$$T = \frac{Pa\,(a^2 - 3\,l^2)}{2\,l^3} \qquad M = P\,\frac{a\,(a^2 - 3\,l^2)\,x + 2\,l^2\,(l - a)}{2\,l^3}$$

$$M_P = \frac{P\,a\,(l-a)^2\,(2l+a)}{2\,l^3} \qquad M_{P\,max} = 0{,}174\,P\,l \quad \text{pour} \quad a = 0{,}366\,l.$$

Fibre moyenne déformée, rotations

$0 < x < a$

$$y = \frac{P\,(l-a)^2\,x}{12\,EI\,l^3}\,[(2\,l + a)\,x^2 - 3\,al^2]$$

$a < x < l$

$$y = \frac{Pa\,(l-x)^2}{12\,EI\,l^3}\,[3\,l\,(l^2 - a^2) - (3\,l^2 - a^2)(l - x)]$$

$$\theta_0 = -\frac{Pa\,(l-a)^3}{4\,EI\,l}.$$

Flèche au milieu :

$$y = -\frac{P\,a}{96\,EI}\,(3\,l^2 - 5\,a^2) \qquad a \leqslant \frac{l}{2}.$$

Cas où $a = b = \frac{l}{2}$

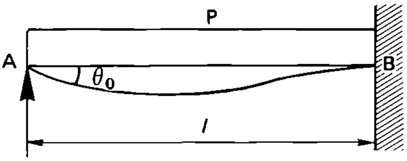
$$A = \frac{5}{16}P \quad B = \frac{11}{16}P \quad M_B = \frac{3\,P\,l}{16} \quad M_P = \frac{5\,P\,l}{32}$$

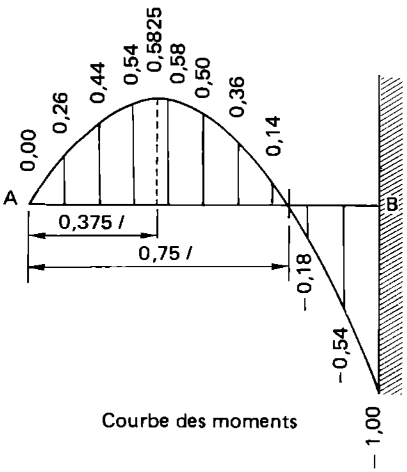
Flèche sous la charge : $-\frac{7\,P\,l^3}{768\,EI}$

$$y_{max} = -0{,}00932\,\frac{P\,l^3}{EI} \quad \text{pour} \quad x = 0{,}4472\,l$$

$$\theta_0 = -\frac{P\,l^2}{32\,EI}$$

b) Charge uniformément répartie.





Courbe des moments

Réactions, efforts tranchants, moments.

$$A = \frac{3\,pl}{8}$$

$$B = \frac{5\,pl}{8}$$

$$M_B = -\frac{p\,l^2}{8}$$

$$T = p\left(\frac{3}{8}l - x\right)$$

$$M = \frac{p\,x}{8}\,(3\,l - 4\,x)$$

$$M_{max} = \frac{9}{128}p\,l^2 = 0{,}07\,p\,l^2$$

pour $x = \frac{3}{8}l.$

Fibre moyenne déformée, rotations.

$$y' = -\frac{p}{48\,EI}(8\,x^3 - 9\,lx^2 + l^3)$$

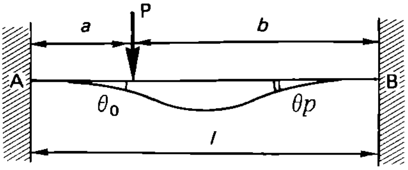
$$y = -\frac{px}{48\,EI}(2\,x^3 - 3\,lx^2 + l^3)$$

$$y_{max} = -0{,}0054\frac{pl^4}{EI} \quad \text{pour } x = 0{,}421\,l$$

$$0_0 = -\frac{p\,l^3}{48\,EI}$$

H.2.2. Poutre encastrée à ses deux extrémités

a) Charge concentrée.



Réactions, efforts tranchants, moments.

$$A = \frac{Pb^2}{l^3}(3a + b)$$

$$B = \frac{Pa^2}{l^3}(3b + a)$$

$$M_A = -\frac{Pab^2}{l^2}$$

$$M_B = -\frac{Pa^2 b}{l^2}$$

$0 < x < a$

$$T = \frac{Pb^2}{l^3}(3a + b) \qquad M = \frac{Pb^2}{l^3}[(3a + b)x - al]$$

$a < x < l$

$$T = -\frac{Pa^2}{l^3}(3b + a) \qquad M = \frac{Pa^2}{l^3}[(3b + a)(l - x) - bl]$$

$$M_P = \frac{2Pa^2 b^2}{l^3}.$$

Pour $a \leqslant \frac{l}{2}$ $\quad M_{max} = -\frac{Pl}{6{,}75}$ $\quad$ pour $a = \frac{l}{3}$.

Fibre moyenne déformée, rotations.

$0 < x < a$

$$y = -\frac{Pb^2 x^2}{6\,EI\,l^3}[3al - x(l + 2a)]$$

$a < x < l$

$$y = -\frac{Pa^2(l - x)^2}{6\,EI\,l^3}[3lx - a(l + 2x)]$$

$$y_P = -\frac{Pa^3 b^3}{3\,EI\,l^3} \quad \text{(sous la charge P)}$$

Flèche maximale $= -\frac{Px_0^2\,alb^2}{6\,EI\,l^3}$ pour $x_0 = \frac{2al}{l + 2a}$ si $a > b$

Cas où $b = a$:

$$A = B = \frac{P}{2} \qquad M_A = M_B = -\frac{Pl}{8} \qquad M_{max} = \frac{Pl}{8} \text{ pour } x = \frac{l}{2}$$

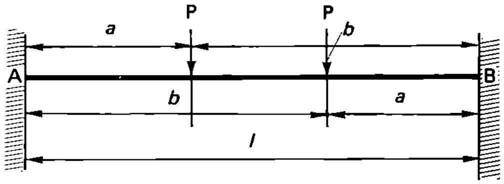
$$y = -\frac{Px^2}{48}(3l - 4x) \quad \text{pour} \quad x \leqslant \frac{l}{2}$$

$$y_{max} = -\frac{Pl^3}{192\,EI} \quad \text{pour} \quad x = \frac{l}{2}.$$

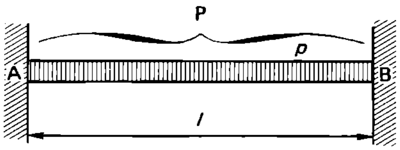
$$\theta_0 = \theta_1 = 0.$$

Cas de deux charges symétriques :

$$M_A = M_B = -\frac{Pab}{l}$$



b) **Charge uniforme répartie P** $= pl$.



Réactions, efforts tranchants, moments.

$$A = B = \frac{pl}{2}$$

$$M_A = M_B = -\frac{pl^2}{12}$$

$$T = \frac{p(l - 2x)}{2}$$

$$M = \frac{p}{12}(6xl - 6x^2 - l^2)$$

$$M_{max} = \frac{pl^2}{24} \quad \text{pour} \quad x = \frac{l}{2}.$$

Fibre moyenne déformée, rotations.

$$y = -\frac{px^2}{24\,EI}(l - x)^2$$

$$y_{max} = -\frac{pl^4}{384\,EI} \quad \text{pour} \quad x = \frac{l}{2}$$

$$\theta_0 = \theta_1 = 0.$$

CHAPITRE H.3

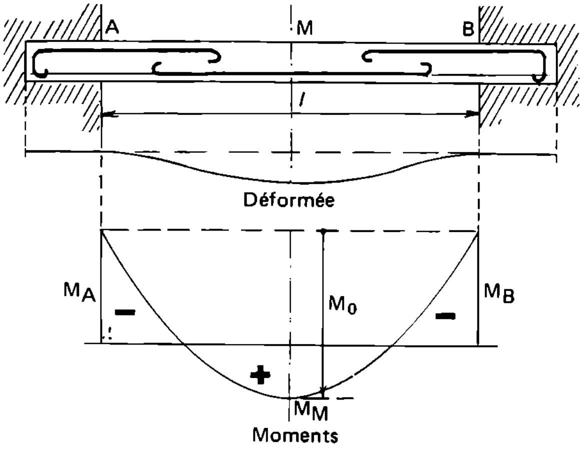
ADAPTATION

Les poutres continues sont un cas très fréquent d'hyperstaticité en particulier dans les bâtiments.

Les nouvelles règles de calcul (B.A.E.L. 80) indiquent *une méthode dite «forfaitaire» applicable aux planchers à charge d'exploitation modérée.*

Cette méthode présente une sécurité en conduisant à des sollicitations de calcul un peu plus élevées que celles qui seraient obtenues par un calcul rigoureux mais beaucoup plus complexe. Il ne faut d'ailleurs pas se faire trop d'illusion sur le côté «rigoureux» de ce genre de calculs car le phénomène de fluage du béton engendre une déformation lente qui a pour effet une rédistribution des sollicitations initiales, c'est le phénomène de *l'adaptation* ; cela signifie que si dans une structure (une poutre encastrée, par exemple) une section A est un peu plus résistante que nécessaire théoriquement et qu'une section M l'est un peu moins, *l'adaptation conduira à une redistribution des moments réels* (par rapport à ceux calculés initialement) qui augmenteront d'eux-mêmes dans la section A et diminueront dans la section M.

Prenons par exemple le cas d'une poutre parfaitement encastrée de portée l soumise à une charge uniformément répartie q/m.c^t :



Si l'encastrement est parfait la fibre moyenne reste tangente à l'horizontale à chacune des extrémités A et B où se produisent des moments négatifs d'encastrement $M_A = M_B - \frac{q\,l^2}{12}$; ces moments provoquent la mise en traction de la fibre supérieure ; il faudra donc y prévoir des armatures longitudinales de flexion calculées à partir de ces moments M_A et M_B.

En travée le moment maximum M_M est positif $= \frac{q\,l^2}{24}$ et il faudra armer en conséquence la fibre inférieure, d'où le schéma d'armatures de flexion indiqué sur la figure précédente.

Il faut remarquer que le total (en valeur absolue) :

$$M_A + M_M = \frac{q\,l^2}{12} + \frac{q\,l^2}{24} = \frac{q\,l^2}{8}.$$

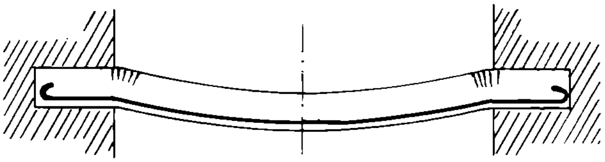
C'est justement la valeur du moment maximal M_0 correspondant à la travée de même portée mais sur appuis libres, on l'appelle : *«travée de comparaison»*.

On voit donc que l'encastrement (comme la continuité d'ailleurs) amène à répartir le moment maximal M_0 de la travée de comparaison, *partie en travée (positif) et partie sur appuis (négatif)*.

La méthode proposée par le réglement consiste à donner des règles forfaitaires pour effectuer cette répartition sans développement de calculs en hyperstaticité.

Cette méthode ne prétend pas donner la valeur exacte des moments réels dans la poutre mais les différences ne sont pas très importantes ; cette imprécision apparente est couverte pour l'adaptation et la sécurité inhérente à ces formules (coefficient > 1 sur M_0).

Si par exemple dans une poutre encastrée aux deux extrémités on adoptait *par supposition adhérente* : $M_M = M_0 = \frac{q\,l^2}{8}$ et $M_A = M_B = 0$ on observerait des fissures en partie supérieure aux appuis mais la poutre s'adapterait et résisterait en travée libre pour laquelle elle se trouverait, en effet, suffisamment armée.

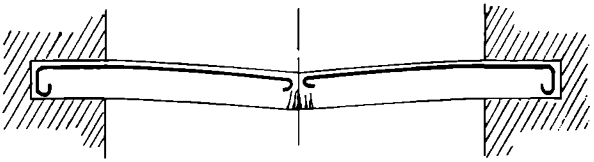


Si, par contre, on adoptait la répartition abhérente opposée

$$M_M = 0 \text{ et } M_A = M_B = M_0 = \frac{q\,l^2}{8}$$

la poutre se fissurerait au milieu en fibre inférieure mais elle résisterait en s'adaptant sous forme de deux consoles encastrées de longueur $\frac{l}{2}$ chacune et qui se trou-

veraient suffisamment armées ; en effet, le moment d'encastrement d'une console $\frac{l}{2}$ est $\frac{ql}{2} \times \frac{l}{4} = \frac{ql^2}{8}$.



Ce raisonnement est évidemment abhérent ; il est un exemple d'adaptation extrême et met seulement en évidence cette possibilité lorsque, par exemple, le fluage engendre une certaine redistribution des moments initiaux ; *mais il convient évidemment* que les moments calculés soient aussi près que possible des moments réels dans la structure, en chacune des sections les plus sollicitées afin d'éviter la naissance d'importantes fissures et de désordres inadmissibles même s'ils ne doivent pas aboutir à la rupture.

CHAPITRE H.4

POUTRES CONTINUES MÉTHODE FORFAITAIRE

H.4.1. Domaine et conditions d'application

Ce chapitre vise principalement les «constructions courantes» et en particulier, les planchers constitués d'une dalle horizontale continue associée à un système de poutres continues formant nervures (poutres principales ou secondaires, poutrelles...).

L'application de cette méthode suppose que les charges d'exploitation sont uniformément réparties et modérées, c'est-à-dire qu'elles ne dépassent pas deux fois la charge permanente ni 5 kN/m^2.

La portée à prendre en compte est mesurée entre axe des appareils d'appuis ou entre nus des poteaux ou murs si les poutres leur sont directement associées (cas très fréquent). On suppose que les portées successives sont dans un rapport compris entre 0,8 et 1,25 et que les sections sont les mêmes dans les différentes travées en continuité.

a) Évaluation des sollicitations

Les sollicitations à prendre en compte se déduisent des combinaisons habituelles à l'état limite ultime (§ A.5.4.C) et le B.A.E.L. précise (* B.6.1.2) les différents cas de charges et combinaison à considérer (travées chargées ou déchargées, le déchargement d'une travée pouvant être défavorable pour une travée adjacente).

b) Principe de la méthode

La méthode consiste à évaluer les valeurs maximales des moments en travée et des moments sur appuis à des fractions (fixées forfaitairement) de la valeur maximale du moment fléchissant M_0 dans la travée de comparaison soumise aux mêmes charges.

c) Conditions d'application de la méthode - Valeurs des coefficients. (*E.1.2)

Soit :

- M_0 la valeur maximale du moment fléchissant dans la «travée de comparaison» c'est-à-dire dans la travée indépendante de même portée libre que la travée considérée et soumise aux mêmes charges.

- M_w et M_e respectivement les valeurs absolues des moments sur appuis de gauche et de droite et M_t le moment maximal en travée qui sont pris en compte dans les calculs de la travée considérée.

- α le rapport des charges d'exploitation à la somme des charges permanentes et des charges d'exploitation : $\alpha = \frac{Q_B}{G + Q_B}$ (indice B : Bâtiments).

Les valeurs de M_t, M_w et M_e doivent vérifier les conditions suivantes :

1) $M_t + \frac{M_w + M_e}{2} \geqslant (1 + 0{,}3\ \alpha)\, M_0$.

Le second membre de l'inégalité n'étant pas inférieur à 1,05 M_0.

2) Le moment maximal en travée M_t n'est pas inférieur à :

$\frac{1 + 0{,}3\ \alpha}{2} M_0$ dans le cas d'une travée intermédiaire ;

$\frac{1{,}2 + 0{,}3\ \alpha}{2} M_0$ dans le cas d'une travée de rive.

3) La valeur absolue de chaque moment sur appui intermédiaire n'est pas inférieure à :

0,60 M_0 dans le cas d'une poutre à deux travées ;

0,50 M_0 dans le cas des appuis voisins des appuis de rive d'une poutre à plus de deux travées ;

0,40 M_0 dans le cas des autres appuis intermédiaires d'une poutre à plus de trois travées.

De part et d'autre de chaque appui intermédiaire, on retient pour la vérification des sections la plus grande des valeurs absolues des moments évalués à gauche et à droite de l'appui considéré.

Si les calculs font intervenir un moment d'encastrement sur un appui de rive, la résistance de cet appui sous l'effet du moment pris en compte doit être justifiée.

Nous donnons dans le tableau suivant quelques valeurs numériques des coefficients de M_0 en fonction de :

$$\alpha = \frac{Q_B}{G + Q_B}$$

	$Q_B = G/5$	$Q_B = G/4$	$Q_B = G/2$	$Q_B = G$	$Q_B = \frac{3}{2} G$	$Q_B = 2\,G$
α	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$
$1 + 0{,}3\,\alpha$	1,05	1,06	1,10	1,15	1,18	1,20
$\frac{1 + 0{,}3\,\alpha}{2}$	0,525	0,53	0,55	0,575	0,59	0,60
$\frac{1{,}2 + 0{,}3\,\alpha}{2}$	0,625	0,63	0,65	0,675	0,69	0,70

d) Détermination de la longueur des chapeaux et arrêts des barres inférieures de second lit

Dans le cas général, on applique les règles données au chapitre C.7. : arrêts de barres.

Lorsque la charge d'exploitation est au plus égale à la charge permanente et lorsque ces charges peuvent être considérées comme uniformément réparties, on peut se dispenser du tracé des courbes enveloppes sous réserve que les dispositions suivantes soient adoptées :

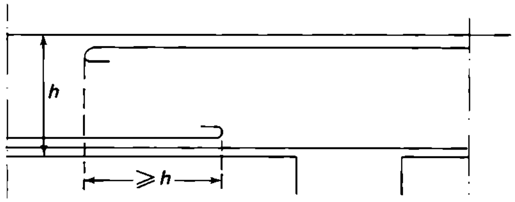
Si l'on adopte pour les moments sur appuis les valeurs absolues minimales définies en 3) ci-dessus, à moins de justifications plus précises, la longueur des chapeaux, à partir du nu des appuis, est au moins égale :

- à 1/5 de la plus grande portée des deux travées encadrant l'appui considéré s'il s'agit d'un appui n'appartenant pas à une travée de rive ;
- à 1/4 de la plus grande portée des deux travées encadrant l'appui considéré s'il s'agit d'un appui intermédiaire voisin de rive.
- la moitié au moins de la section des armatures inférieures nécessaires en travée est prolongée jusqu'aux appuis et les armatures de second lit seront arrêtées à une distance des appuis au plus égale à 1/10 de la portée.

En tout état de cause, l'attention des projeteurs est appelée sur les points suivants :

a) Dans une poutre continue comportant des travées inégales ou inégalement chargées, les chapeaux doivent s'étendre dans les travées les plus courtes et les moins chargées sur une longueur plus grande que dans les travées les plus longues et les plus chargées.

b) La disposition des ancrages des chapeaux et des barres inférieures de renfort doit être telle qu'elle ne favorise pas la formation de fissures sensiblement inclinées à 45°. Il est donc recommandé d'adopter la disposition de la figure lorsqu'on emploie des crochets. Dans le cas de barres arrêtées par scellement droit, il n'y a pas habituellement de prescriptions particulières à respecter par suite du décalage imposé pour le tracé de la courbe enveloppe des moments (article A.4.1,5).



H.4.2. Exemple de calcul d'une poutre continue

a) Données

Poutre (de bâtiment) continue associée à une dalle en béton et présentant des travées successives de 4,00 m de portée entre nu des poteaux de 20 x 20 cm.

La charge permanente (poids propre) est : $g = 10$ kN/m.c[t] et la charge d'exploitation est de 5 kN/m^2 ; la largeur de plancher pris en charge par la poutre est de 1,80 m ; on a donc $q = 5 \times 1{,}8 = 9$ kN/m.c[t]. Ces dispositions autorisent l'utilisation de la méthode forfaitaire précédemment exposée ($q \leqslant 2\,g$ et $q \leqslant 5$ kN/m^2) ; on a :

$$\alpha = \frac{Q_B}{G + Q_B} = \frac{9}{19} \simeq 0{,}5.$$

b) Sollicitations à l'E.L.U. :

Moment de sollicitations M_0 sur la travée de comparaison :

$$M_G = \frac{10 \times 4^2}{8} = 20 \text{ kN.m}$$

$$M_Q = \frac{9 \times 4^2}{8} = 18 \text{ kN.m}$$

$$M_0 = 38 \text{ kN.m}$$

$M_u = 1{,}35\ M_G + 1{,}5\ M_Q = 27 + 27 = 54$ kN.m.

c) Tracé de la courbe des moments fléchissants

Travées intermédiaires :

On adopte sur les appuis les valeurs absolues minimales prévues au paragraphe H.4.1.c.3 ; cela permet de limiter forfaitairement la longueur des barres en chapeaux aux valeurs indiquées au paragraphe 3 de l'annexe F.1 du B.A.E.L. (valeurs indiquées sur le dessin suivant) soit :

$$M_w = M_e = 0{,}40\ M_u \quad 0{,}40\ M_u = 0{,}40 \times 54 = 21{,}6 \text{ kN/m}$$

en milieu de travée, on doit avoir :

$$M_t + \frac{M_w + M_e}{2} \geqslant (1 + 0{,}3\,\alpha)\ M_u \quad \alpha = 0{,}5 \quad 1 + 0{,}3\,\alpha = 1{,}15$$

On adoptera : $M_t = 1{,}15 \times 54 - \dfrac{21{,}6 + 21{,}6}{2} = 40{,}5$ kN.m

Il faut (condition 2) $\quad M_t \geqslant \dfrac{1 + 0{,}3\,\alpha}{2}\ M_u = 0{,}575 \times 54 = 31$ kN.m
satisfait

A noter que cette condition (2) devient en travée de rive

$$M_t \geqslant \frac{1{,}2 + 0{,}3\,\alpha}{2}\ M_0 = 0{,}675 \times 54 = 36{,}45 \text{ kN.M} \quad \text{(voir H.4.1.c).}$$

Travées de rives :

Sur l'appui de rive, on supposera un moment nul ($M_w = 0$), le poteau de 20 x 20 ne présentant pas une raideur suffisante pour assurer un encastrement valable et «justifiable» ; cela est dans le sens de la sécurité.

Sur l'appui voisin, n° 2, on prendra

$$M_e = 0{,}50\ M_u = 0{,}50 \times 54 = 27 \text{ kN.m}$$

Pour le moment maximal en travée, M_t, on doit avoir :

$$M_t + \frac{M_w + M_e}{2} \geqslant (1 + 0{,}3\,\alpha)\ M_u.$$

On adoptera : $M_t = 1{,}15 \times 54 - \frac{27}{2} = 48{,}6$ kN.m

La condition 2 est satisfaite (48,6 > 36,45).

Dans la travée n° 2 le moment en travée sera M_t tel que :

$$M_t + \frac{M_w + M_e}{2} = (1 + 0{,}3\,\alpha)\,M_u \quad \text{soit} \quad M_t = 1{,}15 \times 54 - \frac{27 + 21{,}6}{2} = 37{,}80.$$

On peut ainsi tracer les courbes paraboliques des moments fléchissants ; c'est le tracé n° 1 en trait plein sur la figure suivante.

A remarquer que dans certaines zones, les poutres peuvent être soumises dans une même section soit à un moment positif soit à un moment négatif (voir courbes enveloppes § H.4.2.e). Remarquons que dans le cas présent, la charge d'exploitation (q= 9 kN.m.c^t) ne dépassant pas la charge permanente (g = 10 kN.m.c^t) ; *on pourrait se dispenser* de tracer les courbes enveloppes des moments en fonction des différents cas de charges : travées alternativement chargées (1,35 G + 1,50 Q) et déchargée (1,35 G).

d) Diagramme des efforts tranchants

Comme pour les moments fléchissants, on trace d'abord le diagramme des efforts tranchants sur les travées de comparaison (supposées indépendantes).

Les efforts tranchants sont maximaux au droit des appuis :

$$V_G = \frac{10 \times 4}{2} = 20 \text{ kN.}$$

$$V_Q = \frac{9 \times 4}{2} = 18 \text{ kN.}$$

$$V_0 = 38 \text{ kN.}$$

à l'E.L.U. : $V_u = 1{,}35\,V_G + 1{,}5\,V_Q = 27 + 27 = 54$ kN.

Le diagramme de ces efforts tranchants ultimes V_u sur «travée de comparaison» est tracé sur le même graphique que celui des moments fléchissants ; mais ce diagramme se trouve modifié par l'existence des moments de continuité sur appui.

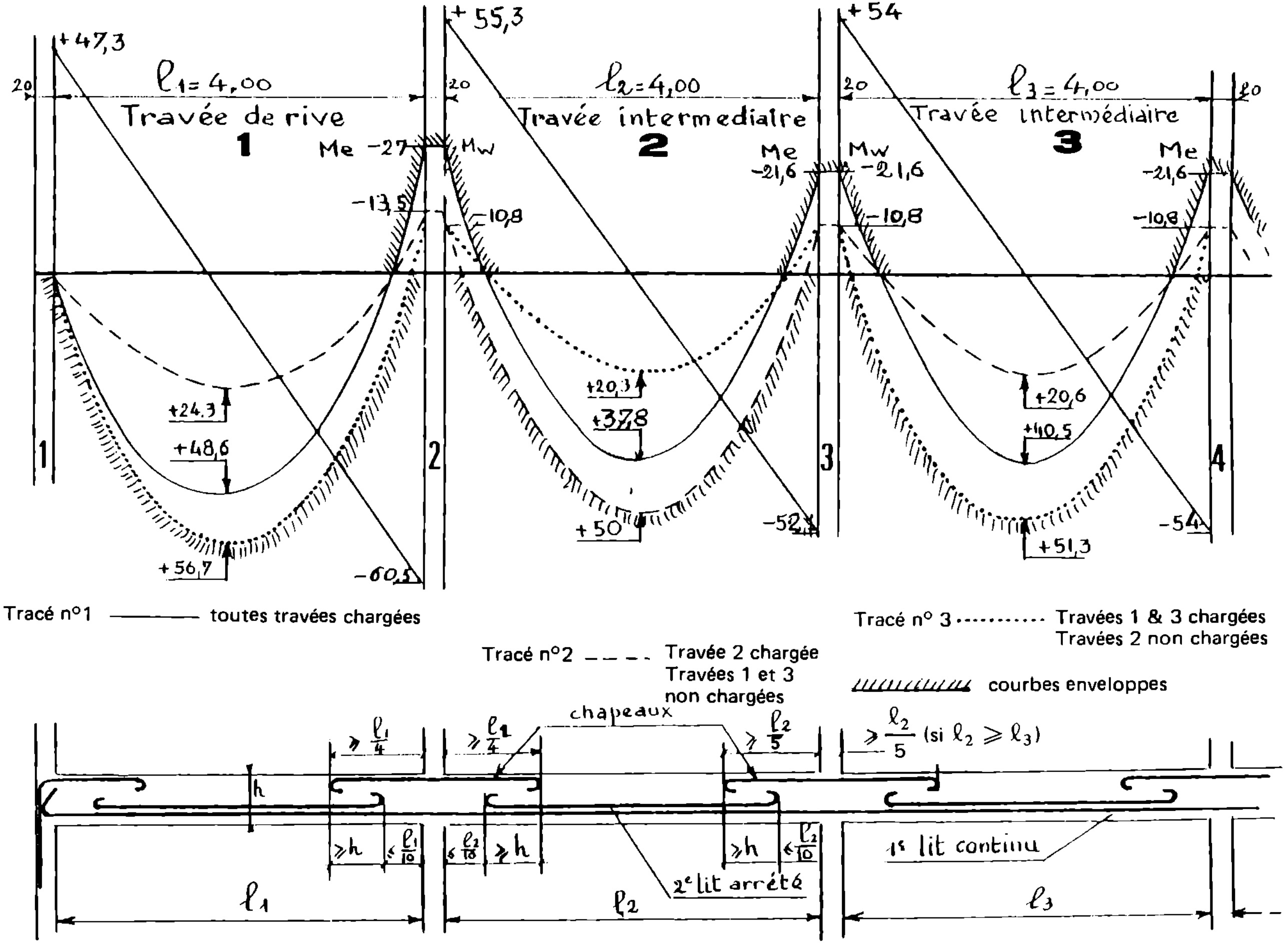
Travée de rive :

L'effort tranchant sur l'appui 1 (en rive) V_{1w} se trouve diminué par l'action du moment de continuité négatif sur l'appui 2 et l'on a $V_{1w} = V_u - \left(\frac{M_1 - M_2}{l_1}\right)$ (les moments étant pris avec leur signe, négatif en général).

$$M_2 = -27 \quad M_1 = 0 \quad \text{et l'on a : } V_{1w} = 54 - \frac{27}{4} = 47{,}3 \text{ kN.}$$

L'effort tranchant à gauche de l'appui 2, dans la partie est de la travée 1 se trouve majorée en conséquence : $V_{2e} = V_0 + \left(\frac{M_1 - M_2}{l_1}\right)$

$$V_{2e} = 54 + \frac{27}{4} = 60{,}5 \text{ kN.}$$


+47,3
+55,3
+54
ℓ_1 = 4,00
ℓ_2 = 4,00
ℓ_3 = 4,00
20
Travée de rive
1
Travée intermediaire
2
Travée intermédiaire
3
Me −27
Mw
Me −21,6
Mw −21,6
Me −21,6
−13,5
−10,8
−10,8
−10,8
+24,3
+48,6
+56,7
+20,3
+37,8
+50
+20,6
+40,5
+51,3
−60,5
−52
−54
1
2
3
4
Tracé n°1 ——— toutes travées chargées
Tracé n°2 – – – – Travée 2 chargée Travées 1 et 3 non chargées
Tracé n° 3 ·········· Travées 1 & 3 chargées Travées 2 non chargées
courbes enveloppes
chapeaux
$\geq \frac{\ell_1}{4}$
$\geq \frac{\ell_2}{5}$
$\geq \frac{\ell_2}{5}$ (si $\ell_2 \geq \ell_3$)
h
$\geq h$
$\leq \frac{\ell_1}{10}$
$\leq \frac{\ell_2}{10}$
1er lit continu
2e lit arrêté
ℓ_1
ℓ_2
ℓ_3

Travée intermédiaire n° 2 :

Sur l'appui 2, on aura :

$$V_{2w} = V_u - \left(\frac{M_2 - M_3}{l_2}\right) = 54 - \left(\frac{-27 + 21,6}{4}\right) = 54 + 1,3 = 55,3 \text{ kN}$$

Sur l'appui 3, on aura :

$$V_{3e} = V_u + \left(\frac{M_2 - M_3}{l_2}\right) = 54 - 1,3 = 52,7 \text{ kN}$$

et ainsi de suite.

Dans le cas présent, les moments sur les autres appuis intermédiaires sont égaux donc les efforts tranchants sur ces appuis restent égaux à $V_0 = 54$ kN. Le diagramme des efforts tranchants peut donc être tracé.

e) Courbes enveloppes :

Lorsque la charge d'exploitation q est supérieure à la charge permanente g il convient d'effectuer le tracé des courbes enveloppes selon que les travées successives sont chargées ou déchargées. Pour cela, on applique, en général, la combinaison d'actions suivantes :

	Cas 1	*Cas 2*
	Travées chargées	Travées déchargées
	1,35 G + 1,5 Q_B	1,35 G
dans ce cas :	$M_u = 54$ kN	$M_u = 27$ kN

Leur tracé peut être effectué à postériori : il suffit d'affecter à chaque cas de charge (1 ou 2) la part des moments sur appuis qui lui correspond (dans l'hypothèse des travées adjacentes soumises ou non à la charge d'exploitation) ; on adopte pour cela une règle proportionnelle appliquée aux moments sélectionnés.

Le rapport de proportionnalité entre le moment M_0 d'une travée non chargée et celui d'une travée chargée est ici $\frac{27}{54} = 0,50$.

Si les travées 1 et 3 ne sont pas chargées les moments négatifs sur les appuis 2 et 3 seront réduits (en valeur absolue) aux valeurs respectives 27 x 0,5 = 13,5 (appui 2) et 21,6 x 0,5 = 10,8 (appui 3) ; le moment positif en milieu de travée se trouvera augmenté et on aura :

$$M_t = 1,15 \times 54 - \frac{13,5 + 10,8}{2} = 50 \text{ kN.m.}$$

Les moments en travées 1 et 3 se trouvent réduits à :

48 x 0,5 = 24,3 (travée 1) et à 40,5 x 0,5 = 20,3 (travée 3).

On peut ainsi tracer le diagramme correspondant (tracé n° 2).

Si par contre, les travées 1 et 3 sont chargées et les travées 2 et 4 déchargées, le moment positif en milieu de travée 2 sera : 40,5 x 0,5 = 20,3 et les moments

négatifs sur appuis 2,3 et 4 ne seront plus que de : $\frac{21{,}6}{2} = 10{,}8$ kN.m ; les moments en travées sur les travées 1 et 3 s'en trouveront augmentés :

en travée 1, on aura :

$$M_t = 1{,}15 \times 54 - \frac{0 + 10{,}8}{2} = 56{,}7$$

en travée 3, on aura : (en supposant que la travée 4 est également déchargée) :

$$M_t = 1{,}15 \times 54 - \frac{10{,}8 + 10{,}8}{2} = 51{,}3.$$

On peut en déduire le tracé 3 (....) de la courbe des moments correspondants.

f) Tracé des armatures

Dans le cas présent, la charge d'exploitation ne dépassant pas la charge permanente, le calcul des sections d'armatures dans les sections les plus sollicitées se fait sur la base de la courbe des moments, toutes les travées étant chargées (tracé n° 1) ; dans le cas général, on adotera dans les sections les plus sollicitées le moment le plus élevé en valeur absolue d'après les courbes enveloppes.

Le premier lit d'armatures inférieures sera continu sur l'ensemble des travées (pas d'arrêt en zone de moment négatif) ; par contre, des recouvrements seront en général nécessaires, compte tenu de la longueur de livraison des aciers.

Pour les longueurs des armatures en chapeaux sur appuis et pour les arrêts de barres du 2è lit inférieur (et éventuellement du 3è lit) on appliquera, dans le cas général, la méthode indiquée au chapitre C.7 en se basant sur les courbes enveloppes des moments.

Dans le cas présent et comme le plus souvent dans les structures courantes, on peut appliquer les règles forfaitaires du paragraphe H.4.1.d ; on a en effet adopté pour le tracé de la courbe des moments (tracé n° 1) les valeurs absolues minimales pour les moments sur appuis.

Ces règles forfaitaires conduisent aux dispositions schématisées sur la figure précédente.

CHAPITRE H.5

POUTRES CONTINUES MÉTHODE DE CAQUOT

H.5.1. Domaine d'application

Cette méthode s'applique lorsque les conditions ne permettent plus l'application de la méthode forfaitaire précédente : en particulier dans les planchers des constructions industrielles pour lesquelles la charge d'exploitation serait supérieure à deux fois la charge permanente ou à 5 kN/m^2 et pourrait, de plus, comporter des charges concentrées Q.

H.5.2. Principe de la méthode

La méthode est une méthode de continuité simplifiée due à Albert Caquot. Elle apporte à la méthode de continuité théorique des corrections pour tenir compte :

- de la variation du moment d'inertie des sections transversales le long de la ligne moyenne de la poutre par suite de la variation de la largeur efficace de la dalle supérieure qui a pour effet de réduire dans une certaine mesure les moments sur appuis et corrélativement d'accroître les moments en travée par rapport à la continuité théorique.
- de l'amortissement des effets des chargements des travées successives, amortissement qui est plus important que le prévoit la continuité théorique, ce qui permet de limiter le nombre des travées recevant les charges d'exploitation.

La méthode de A. Caquot initialement établie pour les poutres non solidaires des poteaux a été étendue au calcul des poutres solidaires des poteaux. Elle peut être appliquée en tenant compte ou non de cette solidarité.

Les conditions d'application de la méthode sont indiquées dans le réglement B.A.E.L. où elles font 'objet de l'annexe E.2.

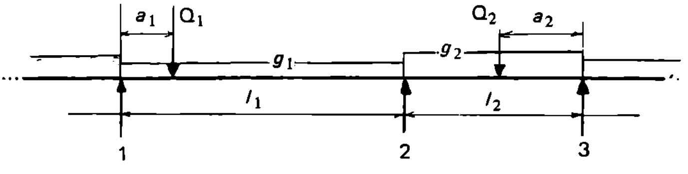
CHAPITRE H.6

POUTRES CONTINUES MÉTHODE DES TROIS MOMENTS

Il s'agit là d'une méthode classique dans laquelle on applique les principes de calcul de la R.D.M. par l'intermédiaire de l'équation des trois moments qui permet de résoudre la plupart des cas usuels de continuité des poutres en particulier, quand on a des appuis simples aux extrémités (hypothèse souvent possible).

H.6.1. Équation des trois moments

Dans une poutre continue, considérons trois appuis successifs n° 1, 2 et 3 et les deux travées adjacentes correspondantes l_1 et l_2 soumises au système de charges suivants :



Au droit des appuis 1, 2 et 3 s'exercent des moments de continuité M_1 M_2 et M_3 chacun d'eux étant dûs aux forces de gauche.

$$M_1\, l_1 + 2\, M_2\, (l_1 + l_2) + M_3\, l_2$$

$$= -\frac{g_1\, l_1^3}{4} - \frac{g_2\, l_2^3}{4} - \frac{\Sigma\, Q_1\, a_1\, (l_1^2 - a_1^2)}{l_1} - \frac{\Sigma\, Q_2\, a_2\, (l_2^2 - a_2^2)}{l_2}$$

On peut écrire une autre équation analogue pour les appuis 2, 3 et 4 ; si l'on se place dans le cas très fréquent où les moments sur appuis extrêmes sont ou peuvent être considérés comme nuls, on a donc (pour une poutre à trois travées, par

exemple), deux inconnues M_2 et M_3 que les deux équations permettent de calculer. De plus, il arrive fréquemment que par raison de symétrie, on ait $M_2 = M_3$, une seule équation suffit alors.

H.6.2. Application

a) Données : Poutre continue (h = 0,70 m) à trois travées (8,10 et 8 m) dans un bâtiment industriel. Appuis simples aux abouts (1 et 4) et solidaires des poteaux intermédiaires 2 et 3 ; mais ceuxi-ci n'existent qu'en dessous et leur raideur étant faible, on négligera la solidarisation, ce qui est d'ailleurs dans le sens de la sécurité :

Charge permanente : g = 20 kN/m.c^t

Charge d'exploitation : q = 40 kN/m.c^t

et, de plus, au milieu et en desous de chaque travée un palan P de 50 kN (voir figure ci-après)

b) Moments dans les travées supposées indépendantes :

	Coefficient E.L.U.	M_u
Charge permanente :		
M_{1G} (et M_{3G}) $= \frac{20 \times 8^2}{8} = 160$ kN.m	1,35	216 kN.m
M_{2G} $= \frac{20 \times 10^2}{8} = 250$ kN.m	1,35	338 kN.m
Charge d'exploitation :		
M_{1q} (et M_{3q}) $= \frac{40 \times 8^2}{8} = 320$ kN.m	1,50	480 kN.m
M_{2q} $= \frac{40 \times 10^2}{8} = 500$ kN.m	1,50	750 kN.m
M_{1P} et (M_{3P}) $= \frac{50 \times 8}{4} = 100$ kN.m	1,50	150 kN.m
M_{2P} $= \frac{50 \times 10}{4} = 125$ kN.m	1,50	188 kN.m

Moments totaux de charges d'exploitation (à l'E.L.U.)

$M_{1Q} = M_{1q} + M_{1P} = 480 + 150 = 630$ kN.m

$M_{2Q} = M_{2q} + M_{2P} = 750 + 188 = 938$ kN.m

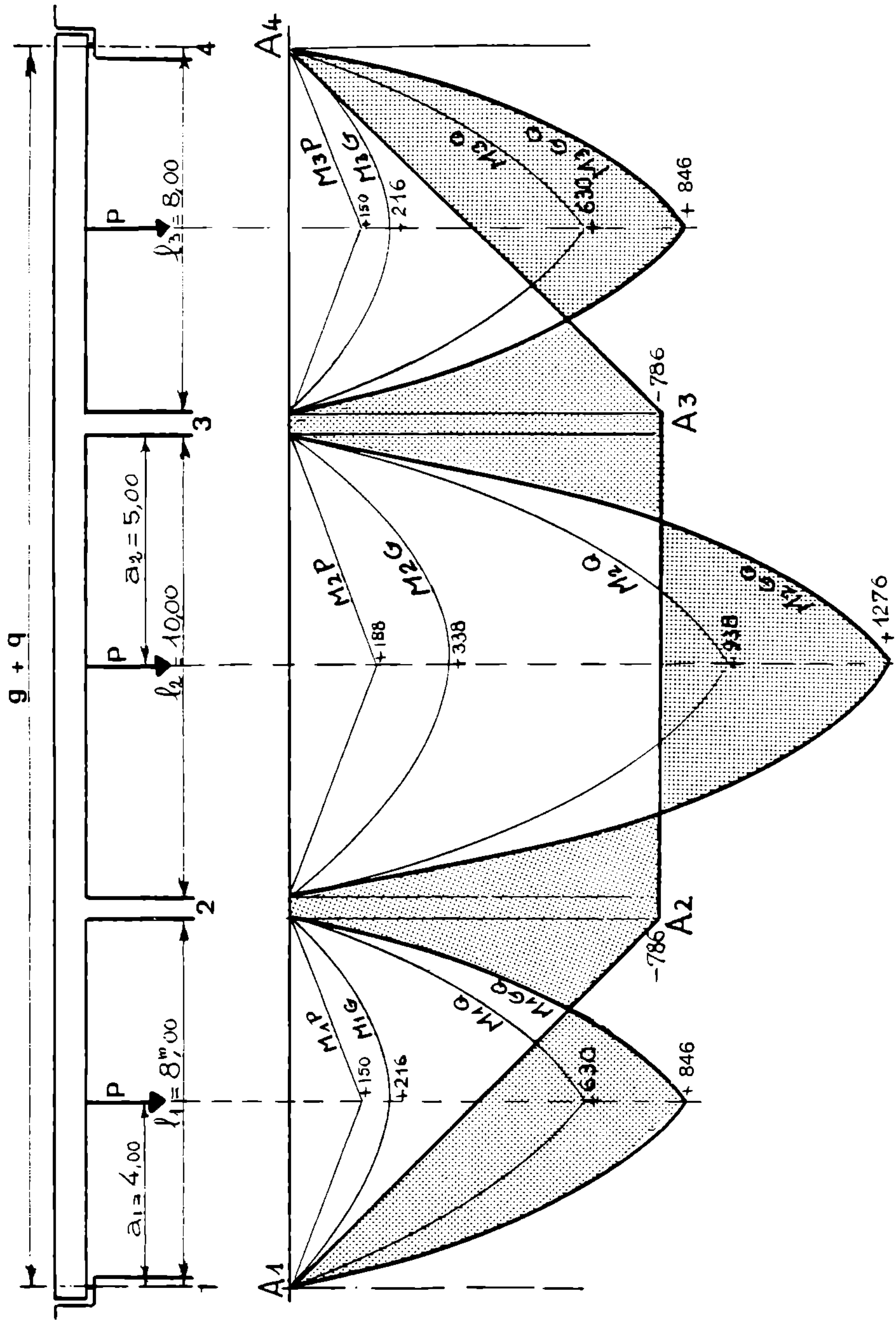
$M_{3Q} = M_{1Q} = 630$ kN.m

Moments maximaux totaux en travées indépendantes :

Travée 1 (ou 3) $M_{1GQ} = M_{1G} + M_{1Q} = 216 + 630 = 846$ kN.m

Travée 2 $M_{2GQ} = M_{2G} + M_{2G} = 338 + 938 = 1276$ kN.m

Les courbes correspondantes ont été tracées sur la figure suivante.


g + q
P
P
P
a1 = 4,00
l1 = 8m,00
a2 = 5,00
l2 = 10,00
l3 = 8,00
1
2
3
4
A1
A2
A3
A4
M1P
M1G
M1Q
M1GQ
M2P
M2G
M2Q
M2GQ
M3P
M3G
M3Q
M3GQ
+150
+216
+630
+846
+188
+338
+938
+1276
+150
+216
+630
+846
-786
-786

c) **Moments sur appuis intermédiaires (2 et 3)** :

Nous étudierons le cas où les charges d'exploitation (q et P) sont entièrement appliquées et sur l'ensemble des travées.

A l'état limite ultime, la charge uniformément répartie est :

Charge permanente $g_u = 1{,}35 \times 20 \quad = 27$ kN.m.c^t
Charge d'exploitation $q_u = 1{,}50 \times 40 = \underline{60 \text{ kN.m.c}^t}$
total $= 87$ kN.m.c^t

Charges concentrées $P_u = 1{,}5 \times 50 = 75$ kN

Nous rappelons que $M_1 = M_4 = 0$ (appuis libres) et que par raison de symétrie $M_2 = M_3$.

On peut donc écrire l'équation des trois moments pour les appuis 2 et 3 et pour les deux travées l_1 et l_2 :

$$2\,M_2\,(8 + 10) + M_3 \times 10 = -\frac{87 \times 8^3}{4} - \frac{87 \times 10^3}{4} - \frac{75 \times 4\,(8^2 - 4^2)}{8} - \frac{75 \times 5\,(10^2 - 5^2)}{10}$$

$46\,M = -36149 \qquad M = -786$ kN.m

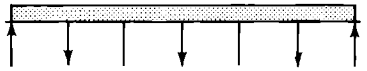
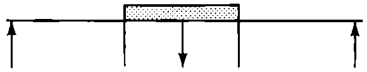
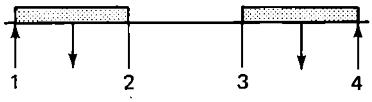
d) **Moments résultants** :

On peut donc tracer la ligne de fermeture $A_1 A_2 A_3 A_4$; les surfaces qui se trouvent entre cette ligne et les courbes des moments maximaux (M_{GQ}) dans les travées libres «correspondantes» représentent les moments dans la poutre continue ; les surfaces en dessous de la ligne de fermeture sont des moments positifs et celles qui sont au dessus sont des moments négatifs.

e) **Autres cas de charge** :

Le cas de charge n° 1 est celui qui engendre les moments négatifs maximaux sur les deux appuis intermédiaires.

Pour que les calculs soient complets d'autres cas de charges devraient être étudiés de la même manière :

Cas	*Schéma des charges d'exploitation*	*Conséquences*
N° 1		Moments négatifs maximaux sur appuis 2 et 3
N° 2		Moment positif maximal en travée centrale
N° 3		Moment positif maximal en travées latérales

Le tracé des courbes des moments de chacun de ces cas donne les courbes enveloppes des moments ultimes et le calcul des armatures se fera à partir des moments maximaux sur appuis et en travées par les méthodes précédemment exposées (sections d'armatures et arrêts de barres).

H.6.3. Efforts tranchants - Méthode classique

Nous rappelons qu'il convient tout d'abord de calculer les efforts tranchants sur les travées indépendantes correspondantes ; soit, par exemple, $V_{0\,(2w)}$ l'effort tranchant (côté ouest de la travée 2) calculé sur la travée 2 indépendante et M_2 et M_3 les moments de continuité aux extrémités de cette travée (à prendre avec leur signe négatif en général) on aura sur la travée continue :

$$V_{2w} = V_{0(2w)} - \left(\frac{M_2 - M_3}{l_2}\right)$$

A titre d'exemple de calcul numérique, on pourra se reporter au paragraphe H.4.2.d.

H.6.4. Efforts tranchants - Méthode simplifiée.

Dans le cas des planchers à charge d'exploitation modérée (*B.8.1,1), on admettra comme effort tranchant la valeur V_0 (calculée en travée libre) sur les appuis intermédiaires et sur l'appui extrême, mais on la majorera de 15 % sur l'appui intermédiaire d'une poutre à deux travées et de 10 % sur l'appui voisin de l'appui de rive sur une poutre à plus de deux travées (cela a été indiqué au chapitre F.3).

MODULE I - DALLES

CHAPITRE I.1

CAS DES DALLES PORTANT SUR DEUX CÔTÉS PARALLÈLES

On appelle «dalle» un élément généralement horizontal dont l'épaisseur est relativement faible par rapport à ses dimensions en longueur et en largeur. Si la dalle ne porte que sur les deux côtés opposés, on l'appelle «poutre-dalle» ; on considère alors pour les calculs une tranche de dalle d'une certaine largeur b_0 (1,00 m par exemple) et de portée l (portée de la dalle entre les deux côtés sur lesquels elle est appuyée) ; on a alors une poutre de section rectangulaire $h \times b_0$ (h étant l'épaisseur totale de la dalle).

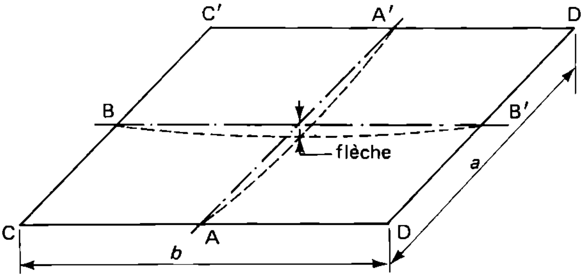
Toutes les règles de calcul propres aux sections rectangulaires sont alors applicables, la poutre ainsi définie pouvant être sur appuis simples ou continue.

Toutefois, la largeur d'une dalle étant toujours relativement très importante par rapport à son épaisseur, des règles spéciales sont prescrites pour la justification des contraintes tangentes sous sollicitation d'effort tranchant ; ces prescriptions seront indiquées dans la suite de ce module au paragraphe I.4.2.

CHAPITRE I.2

CAS DES DALLES RECTANGULAIRES APPUYÉES SUR QUATRE CÔTÉS

I.2.1. Répartition des moments



Considérons une dalle rectangulaire CC'DD' appuyée sur ses quatre côtés et de dimension a et b ; on suppose $a < b$ et on désigne par ρ le rapport $\frac{a}{b}$

$$\rho = \frac{a}{b} \leqslant 1.$$

La dalle en question va donc fléchir dans chacune des portées a et b et la flèche, en tout point, reste évidemment égale dans les deux sens ; les moments fléchissants agiront dans chacune des portées a et b et seront, pour chacune des portées, maximaux au milieu. Mais, contrairement à ce que l'on pourrait penser à priori (par analogie avec les poutres sur deux appuis) c'est dans le sens a de la petite portée que se manifestera le moment maximal ; en effet, il est évident que la flexion sur la grande portée est d'avantage «soulagée» par l'appui longitudinal sur les côtés adjacents (relativement rapprochés) que la flexion dans le sens de la petite portée ; le «soulagement» du moment fléchissant dans la petite portée devient d'ailleurs presque négligeable si le rapport $\rho = \frac{a}{b}$ devient inférieur à 0,40.

Pigeaud a établi une théorie du partage élastique des moments fléchissants entre petite et grande portée dans les plaques rectangulaires appuyées sur leurs quatre côtés ; cette théorie a permis l'établissement d'abaques fort connus et très utilisés.

I.2.2. Abaques de Pigeaud. Calcul des moments fléchissants

La plaque a pour dimensions «*a*» et «*b*» ($a < b$) ; on a posé $\rho = \frac{a}{b}$. M_1 représente le moment fléchissant (rapporté à l'unité de longueur de la plaque) dans le sens de la petite portée (*a*).

M_2 est la quantité analogue relative au sens de la grande portée (*b*).

Si ν est le coefficient de Poisson (dont la valeur à prendre en compte est indiquée ci-après) et si d'autre part P est la valeur de la charge totale, supposée uniformément répartie et recouvrant complètement ou incomplètement la plaque, les moments fléchissants développés au centre de la plaque ont pour expression :

sens de la petite portée : $M_a = (M_1 + \nu M_2) P$

sens de la grande portée : $M_b = (\nu M_1 + M_2) P$

Lorsque la plaque est un élément d'une dalle continue, ou est reliée à des appuis présentant un moment d'inertie assez important, il en résulte un encastrement partiel de ses bords, dont on tient compte couramment, quoique un peu arbitrairement, il est vrai, en réduisant de 20 % les valeurs des moments fléchissants en travée obtenues au moyen des formules précédentes ; on prend alors en compte sur les quatre lignes d'appuis un moment d'encastrement ou de continuité égal à $-0{,}5\ M_a$ (les moments d'encastrement sont supposés égaux dans les deux sens).

a) **Cas d'une charge totale P = 1 uniformément répartie sur toute la surface de la plaque.**

L'abaque n° 1 fait connaître directement M_1 pour la valeur $\rho = \frac{a}{b}$; pour obtenir M_2, il suffit d'employer l'argument $\rho' = \frac{b}{a} = \frac{1}{\rho}$.

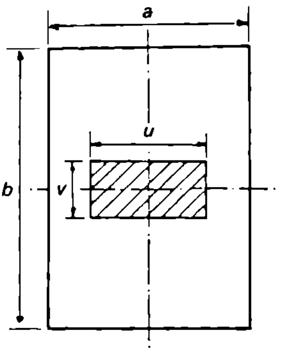
Dans le cas de charge concentrée, on se reportera aux indications du paragraphe A.5.3. permettant de déterminer le rectangle d'application de côté *u* et *v* sur le feuillet moyen de la dalle, puis on appliquera les dispositions qui suivent.

b) **Cas d'une charge P = 1 uniformément répartie sur un rectangle concentrique à la plaque, de dimensions *u* et *v*.**

On désigne par «*u*» la dimension du rectangle chargé parallèle à «*a*» et par «*v*» la dimension parallèle à «*b*».

La valeur de $\rho = \frac{a}{b}$ permet immédiatement de choisir les deux abaques auxquels il faut se reporter. Il suffit ensuite de repérer sur les abaques correspondant à M_1 ou M_2 respectivement les cotes des courbes passant par le point d'abscisse

$\frac{u}{a}$ et d'ordonnée $\frac{v}{b}$. La valeur numérique de M_1 ou de M_2 est égale à la cote trouvée, multipliée par 10^{-2}.



c) **Le coefficient de Poisson ν est pris égal à 0,20** pour le béton armé non fissuré et 0 en cas de fissuration. Les règles BAEL ne donnent pas d'autres précisions ; nous préconisons d'adopter les valeurs ci-après selon les cas, ce qui est dans le sens de la sécurité à la fissuration, si celle-ci est préjudiciable :

- *Fissuration peu nuisible* : Calcul à l'E.L.U. seulement avec $\nu = 0$
- *Fissuration préjudiciable* : Calcul à l'E.L.U. et à l'E.L.S. avec $\nu = 0{,}20$.

d) Cas d'une charge totale P = 1 uniformément répartie sur un rectangle non concentrique à la plaque

On peut encore se servir dans ce cas des mêmes abaques, en suivant des indications données par Résal, pour ramener ce cas de charge à celui de rectangles chargés concentriques à la plaque (annales 1912 - fascicule 6).

Nous donnons ci-dessous la règle pratique qui s'y trouve énoncée :

Soit A un rectangle dont les côtés sont parallèles à ceux de la plaque, mais dont le centre ne coïncide pas avec le point O. Les formules de l'article précédent permettront de calculer les moments fléchissants M_a et M_b développés au point O (centre de la plaque) par une charge uniforme «*p*» couvrant le rectangle A (par unité de surface).

Prolongeons les côtés de ce rectangle jusqu'aux axes de symétrie du hourdis, et complétons la figure par trois autres tracés linéaires, symétriques du premier par rapport aux deux axes et au centre O du hourdis. On obtient ainsi un rectangle EFGH centré sur la plaque et pouvant être décomposé lui-même en rectangles partiels également centrés.

On distingue dans cette figure : quatre rectangles égaux et symétriques A, deux rectangles B, deux rectangles C, enfin un rectangle D.

On appliquera successivement chacune des formules précédentes aux cas de la charge «*p*» couvrant les quatre rectangles I, II, III et IV qui sont concentriques aux hourdis.

Or, on a : $I = 4\,A + 2\,B + 2\,C + D$

$II = 2\,B + D$

$III = 2\,C + D$

$IV = D.$

On déduira des quatre moments I, II, III, IV ainsi obtenus, les moments relatifs aux charges dissymétriques couvrant les rectangles A, B, C par les relations :

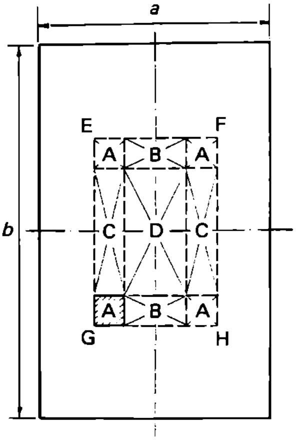
$$B = \frac{II - IV}{2}$$

$$C = \frac{III - IV}{2}$$

$$A = \frac{I - II - III + IV}{4}$$

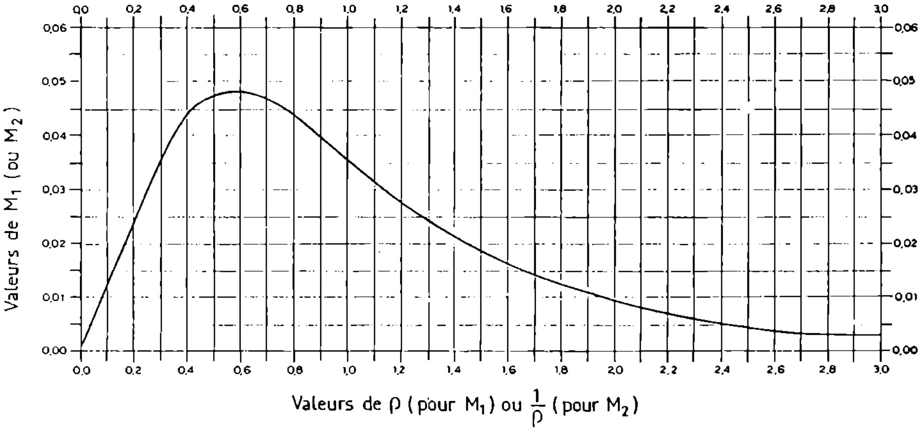
On conçoit qu'il soit possible, par cette méthode, d'évaluer les moments M_a et M_b relatifs à une charge distribuée de façon quelconque, en décomposant la surface couverte en rectangles ayants leurs côtés parallèles à ceux du hourdis, et pour chacun desquels on effectuera séparément le calcul précédent.

Les opérations à faire pourront être nombreuses et ennuyeuses, mais elles ne présenteront aucune difficulté.



REMARQUE : Il est à remarquer que le plus souvent, dans ce cas, le calcul (ici, pour le moment, créé par la charge A) met en jeu des différences entres des valeurs élémentaires très importantes (rectangles I, II, III et IV) dont le résultat définitif est relativement très faible ; si ces valeurs élémentaires ne sont évaluées qu'avec une certaine approximation, l'erreur sur le résultat risque d'être considérable ; il convient donc que la lecture des valeurs sur les abaques soit réalisée avec *la plus grande précision possible.*

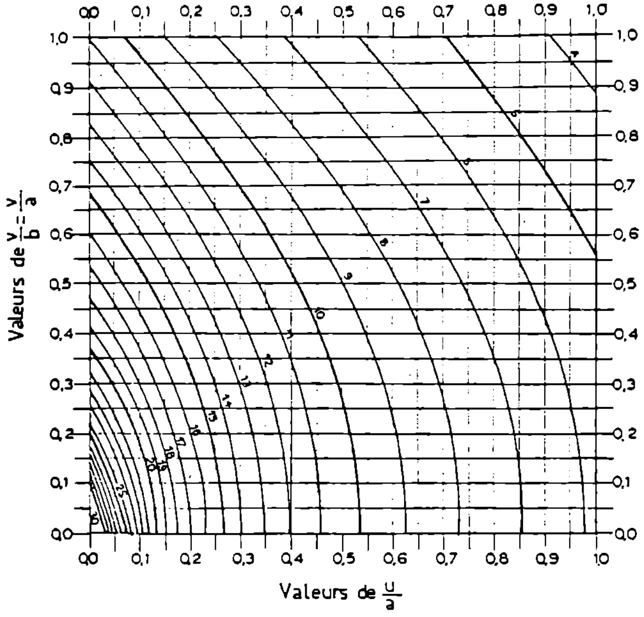
Cas de $\rho = \frac{a}{b}$ (a<b) **Abaque n° 1**



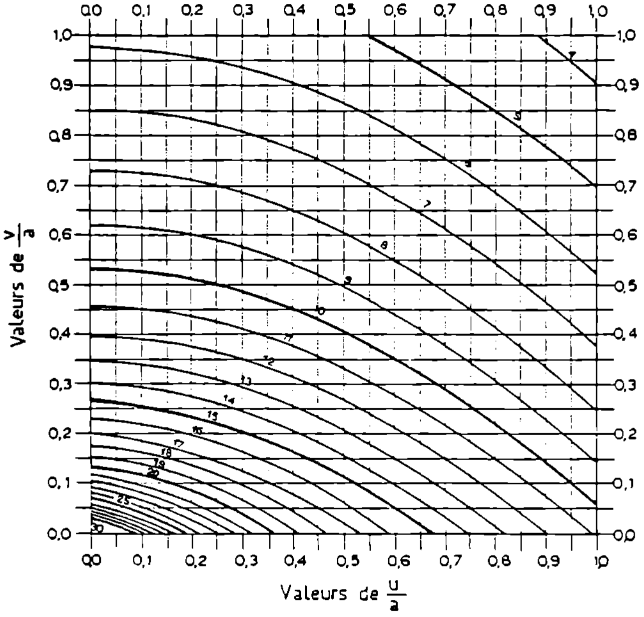
Abaques n° 2

1er Cas de $\rho = 1$ ($a = b$)

a) Valeurs de $M_1 \times 10^2$ (sens parallèle à u)



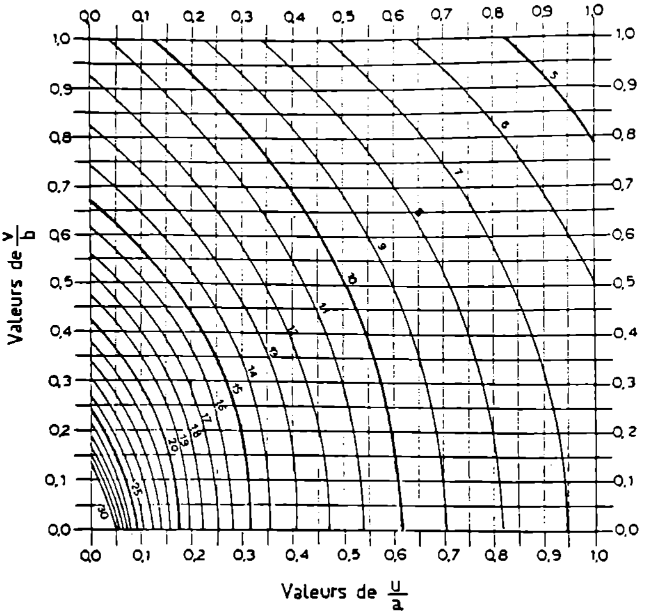
b) Valeurs de $M_2 \times 10^2$ (sens parallèle à v)



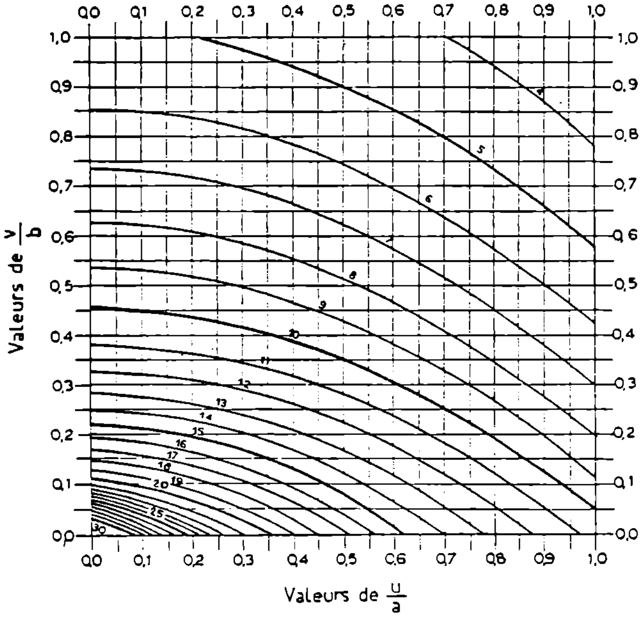
Abaques n° 3

2ème cas de ρ = 0,9

a) Valeurs de $M_1 \times 10^2$



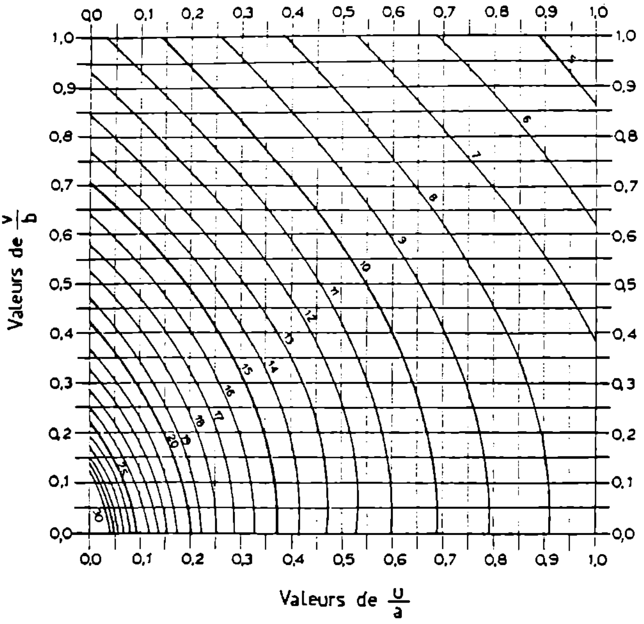
b) Valeurs de $M_2 \times 10^2$



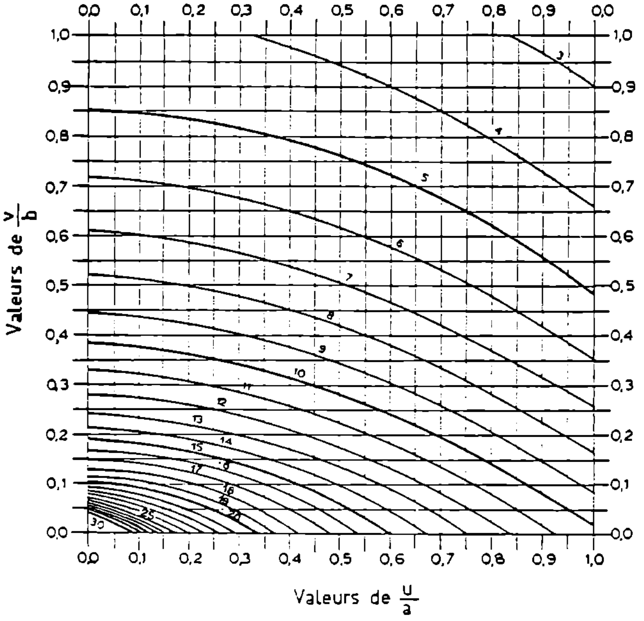
Abaques n° 4

3ème Cas de $\rho = 0{,}8$

a) Valeurs de $M_1 \times 10^2$



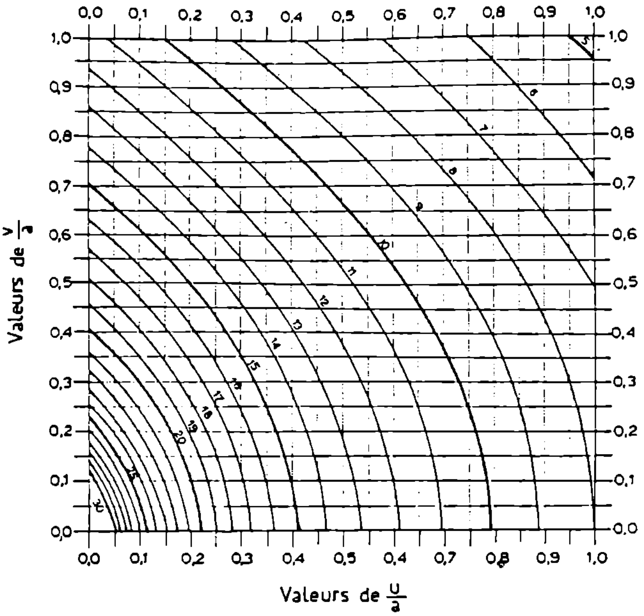
b) Valeurs de $M_2 \times 10^2$



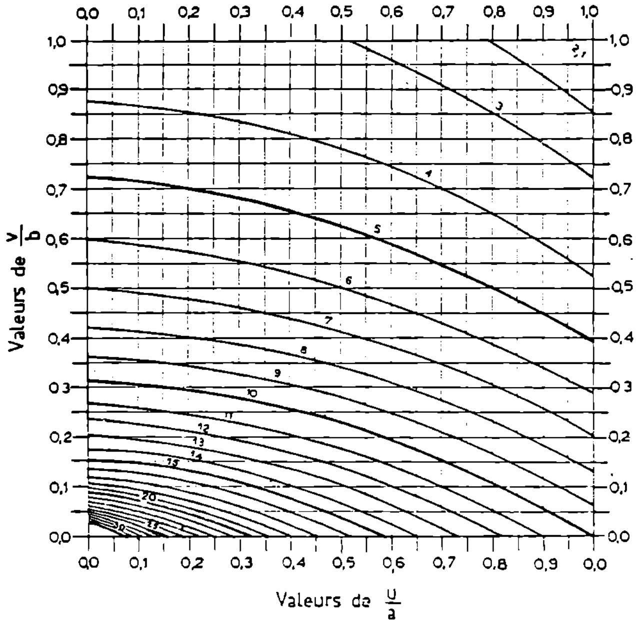
Abaques n° 5

Cas de $\rho = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,707$

a) Valeurs de $M_1 \times 10^2$



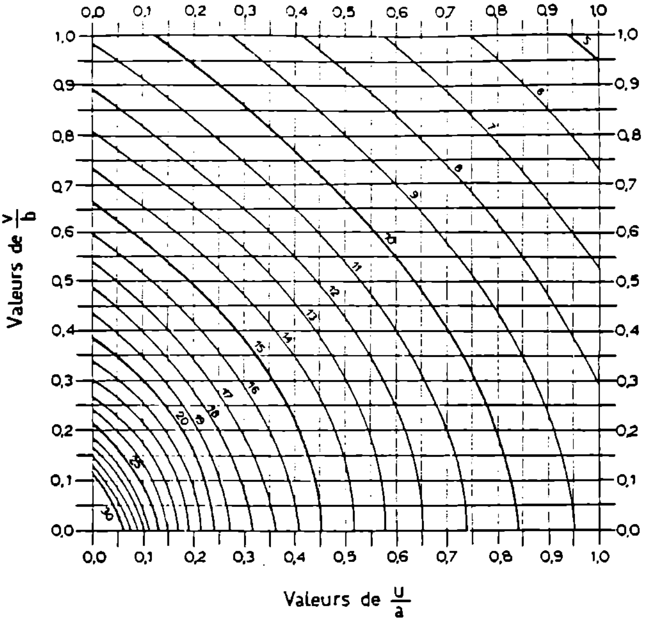
b) Valeurs de $M_2 \times 10^2$



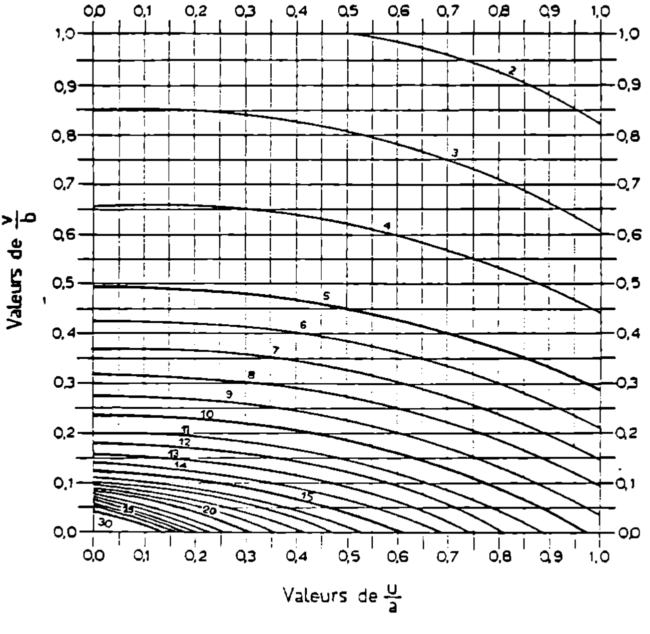
Abaques n° 6

Cas de $\rho = 0,6$

a) Valeurs de $M_1 \times 10^2$



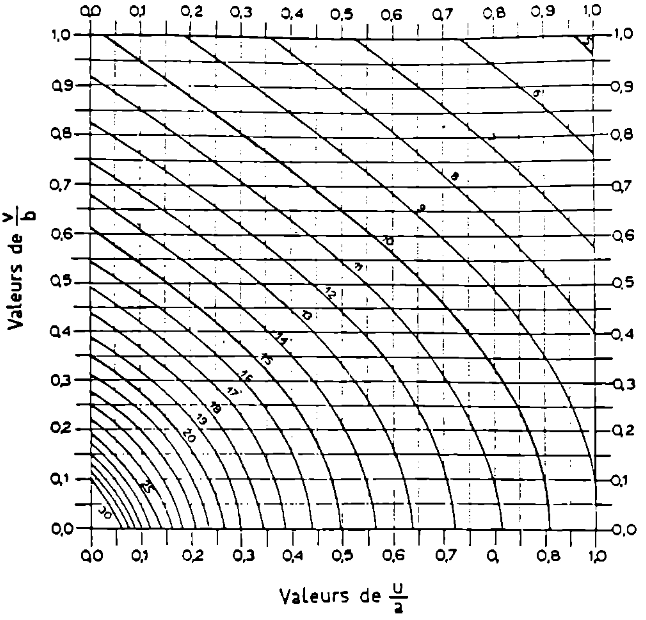
b) Valeurs de $M_2 \times 10^2$



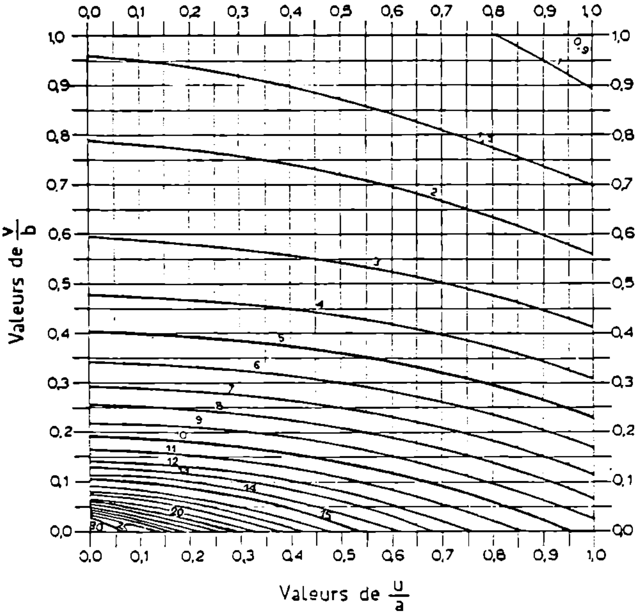
Abaques n° 7

Cas de $\rho = 0,5$

a) Valeurs de $M_1 \times 10^2$



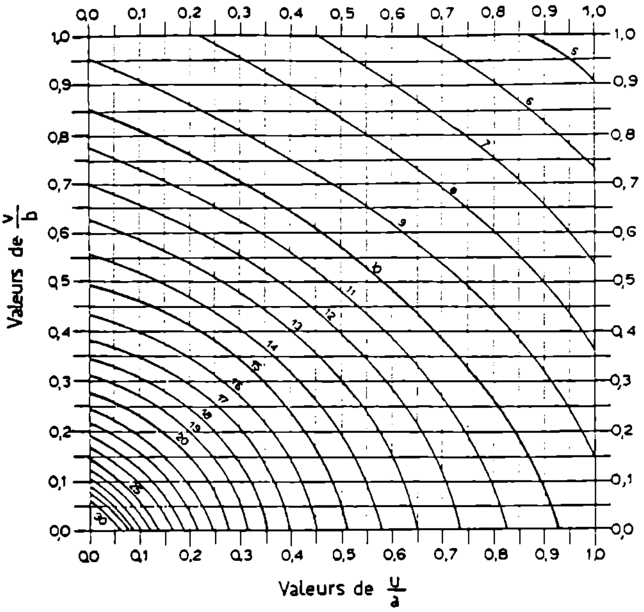
b) Valeurs de $M_2 \times 10^2$



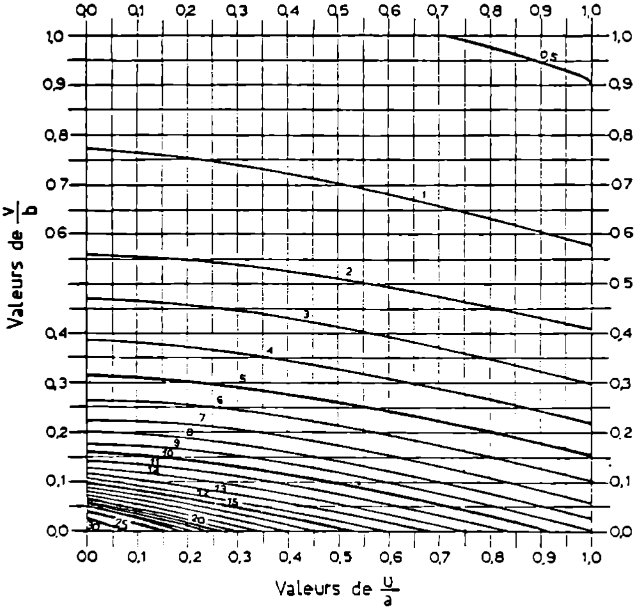
Abaques n° 8

Cas de $\rho = 0{,}4$

a) Valeurs de $M_1 \times 10^2$



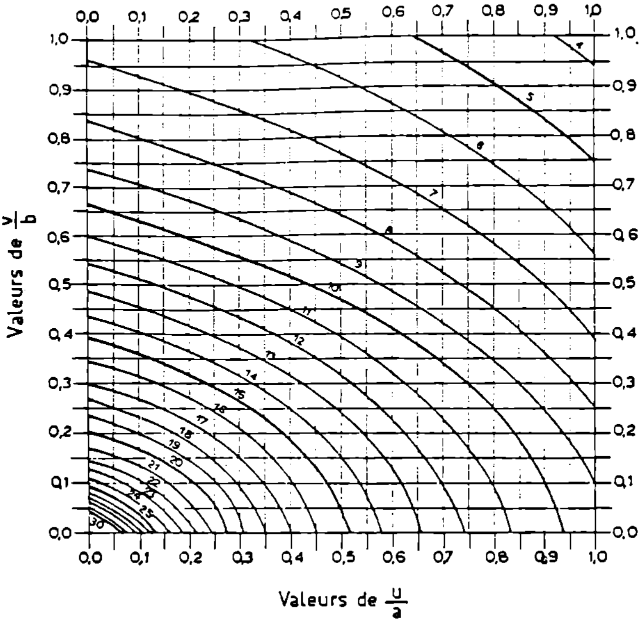
b) Valeurs de $M_2 \times 10^2$



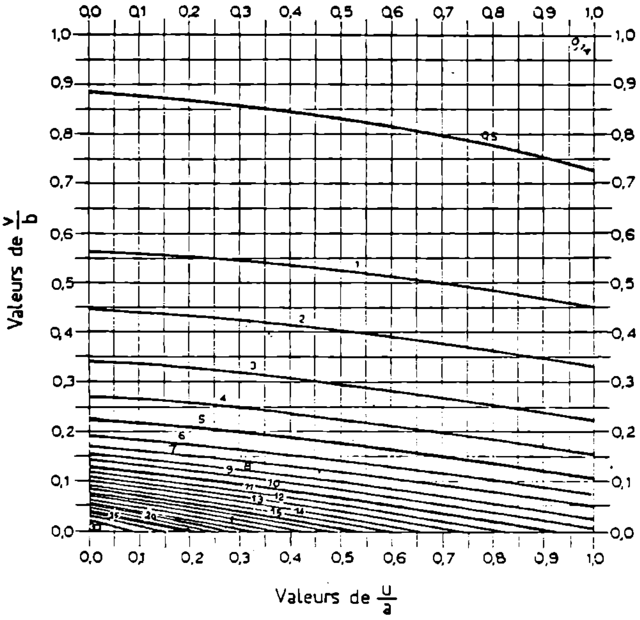
Abaques n° 9

Cas de $\rho = 0,3$

a) Valeurs de $M_1 \times 10^2$



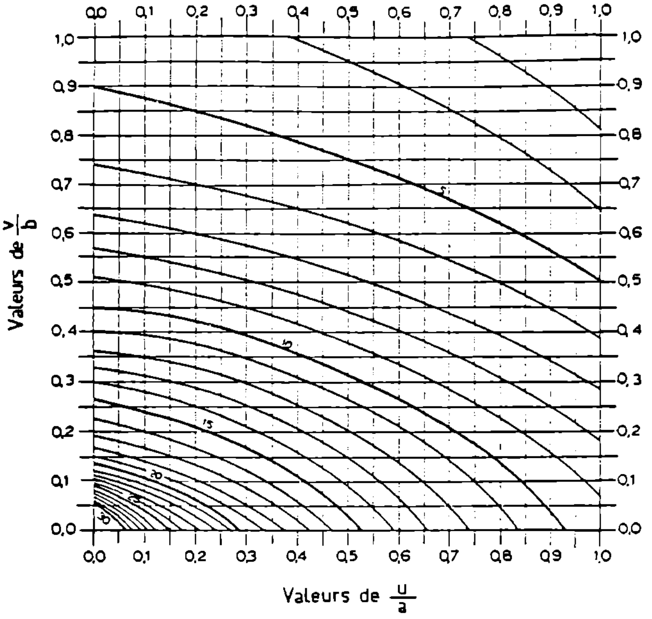
b) Valeurs de $M_2 \times 10^2$



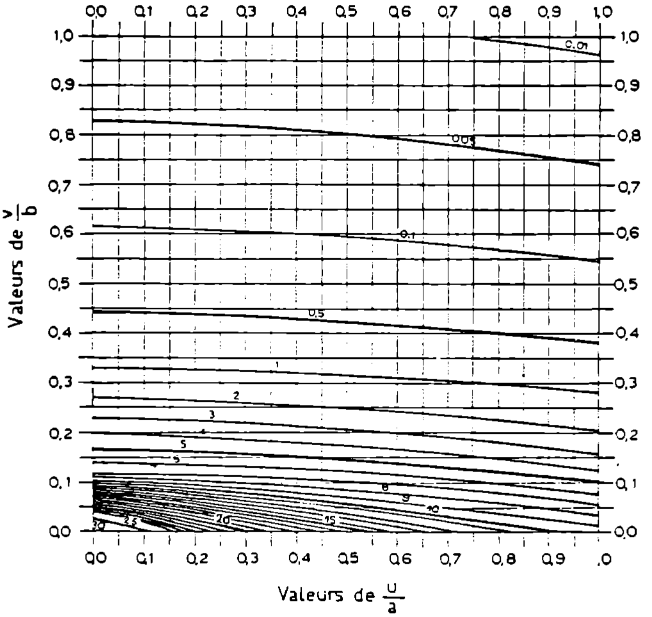
Abaques n° 10

Cas de $\rho = 0,2$

a) Valeurs de $M_1 \times 10^2$



b) Valeurs de $M_2 \times 10^2$

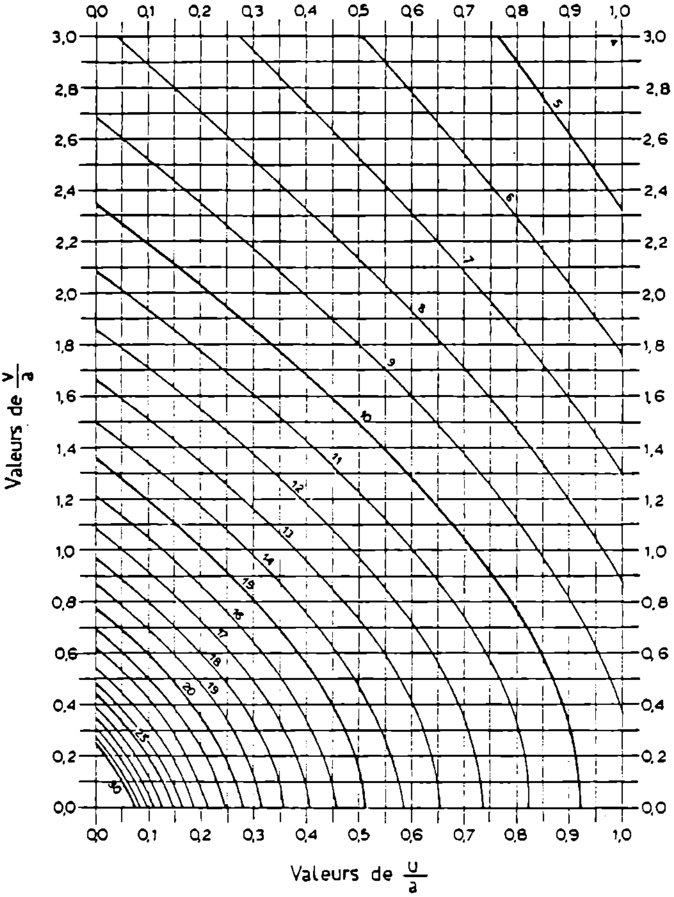


Abaque n° 11

Cas de $\rho = 0$

a) Valeurs de $M_1 \times 10^2$

(b très grand par rapport à a)

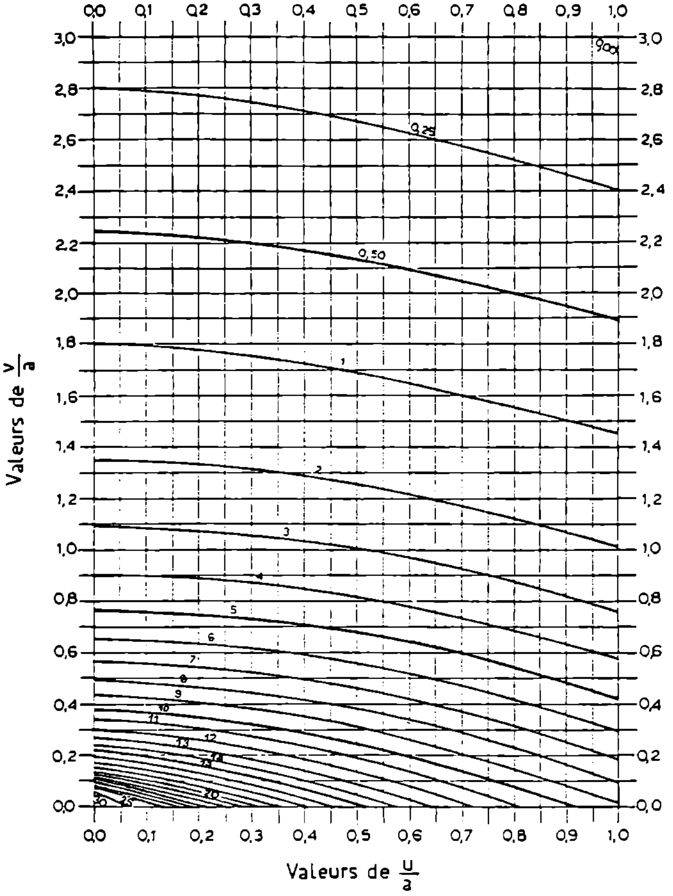


Abaque n° 12

Cas de $\rho = 0$

b) Valeurs de $M_2 \times 10^2$

(b très grand par rapport à a)



I.2.3. Cas des structures courantes

Dans son annexe F.3. le BAEL donne des prescriptions simplifiées pour les hourdis rectangulaires *uniformément chargés.*

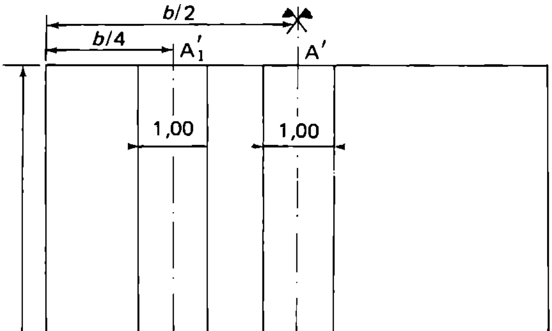
Ces prescriptions conduisent à des résultats pratiquement identiques à ceux obtenus par la méthode Pigeaud ; cette dernière présente toutefois l'avantage de la possibilité de prendre en compte une charge concentrée sur un petit rectangle $u.v$, par l'intermédiaire de la série d'abaques précédents n° 2 à 12.

CHAPITRE I.3

CALCUL EN FLEXION DISPOSITION DES ARMATURES

Les indications du paragraphe I.2. précédent permettent de déterminer les moments fléchissants maximaux pour les tranches axiales de la dalle (sens AA′ et BB′) ainsi que d'évaluer les moments négatifs sur appuis dans le cas des dalles continues.

Le calcul des armatures tendues (il est très rare de prévoir dans les dalles des armatures comprimées) se fera de la même manière que pour les poutres rectangulaires et par tranche de dalle (de 1,00 m de largeur par exemple), dans un sens et dans l'autre.



Dans le cas où la dalle a des dimensions importantes, on pourra tenir compte de la diminution du moment au fur et à mesure que l'on se rapproche des côtés ; en général, sauf cas de charges concentrées importantes, on pourra considérer que le moment (sens *a*) suivant $A_1 A'_1$ au 1/4 de la portée dans le sens *b* est égal au 3/4 du moment au milieu suivant AA′ ; par contre, en ce qui concerne les moments négatifs sur appuis les armatures prévues en chapeaux ne seront pas diminuées lorsqu'on se rapproche des angles qui constituent une zone de fissuration préférentielle.

Les arrêts de barres pourront être déterminés selon les mêmes règles que celles données pour les poutres. Les dispositions adoptées pour les chapeaux sur appuis

(section, espacement et longueur) dans le sens de la petite portée seront également adoptées sur les appuis dans le sens de la grande portée ; il s'y produit, en effet, des moments de continuité du même ordre. Les barres arrêtées ne le seront qu'à raison d'une sur deux et aucun arrêt de barres ne sera prévu si la dalle est soumise à des charges concentrées mobiles.

Le taux des armatures est le rapport de la section d'armatures, dans chaque direction, à la section totale du béton (perpendiculaire à cette direction) ; pour les dalles carrées dont l'épaisseur est comprise entre 0,12 et 0,30 m, le taux doit être au moins égale à : (*A.8.2,41)

0,12 % pour les ronds lisses Fe E 22 et E 24
0,08 % pour les barres H.A. Fe E 40
0,06 % pour les barres H.A. Fe E 50.

Lorsqu'il s'agit d'une dalle rectangulaire $\left(\alpha = \frac{l_x}{l_y} < 1\right)$ le taux des armatures parallèles au petit côté est multiplié par le facteur $\frac{3-\alpha}{2}$; ce facteur varie de 1 pour les dalles carrées à 1,5 pour les dalles de grande longueur.

L'écartement des armatures d'une même nappe ne doit pas dépasser les valeurs suivantes, h désignant l'épaisseur totale de la dalle (A.8.2,43) :

	Charges	
	Uniformément réparties	Concentrées
Petite portée	3 h et 33 cm	2 h et 22 cm
Grande portée	4 h et 45 cm	3 h et 33 cm

REMARQUE : Ces valeurs nous semblent un peu excessives ; elles peuvent être, en général nettement inférieures.

Épaisseurs et flèches : on admettra qu'il n'est pas nécessaire de procéder au calcul des flèches si la condition suivante est respectée :

$$\frac{h}{l_x} \geqslant \frac{1}{25}. \qquad (l_x = \text{petit côté})$$

CHAPITRE I.4

CALCUL A L'EFFORT TRANCHANT

I.4.1. Évaluation des efforts tranchants

En ce qui concerne les efforts tranchants, on peut admettre les règles suivantes, qu'il parait bon de rappeler :

a) Charge totale P uniformément répartie sur toute la surface de la plaque

Effort tranchant par unité de longueur d'appui :

- maximum : au milieu du plus grand côté $\frac{P}{2b+a}$
- minimum : au milieu du plus petit côté $\frac{P}{3b}$

b) Charge totale P uniformément répartie sur un rectangle concentrique à la plaque de dimension «u» et «v».

Effort tranchant par unité de longueur.

Si $u > v$	*Si* $u < v$
au milieu de u : $\frac{P}{2u+v}$	au milieu de u : $\frac{P}{3v}$
au milieu de v : $\frac{P}{3u}$	au milieu de v : $\frac{P}{2v+u}$

I.4.2. Justification des armatures

Les dalles présentent une grande largeur b_0 ; il en résulte des contraintes de cisaillement relativement faible et, dans la plupart des cas, il ne sera pas nécessaire de prévoir des armatures à l'effort tranchant (armatures transversales de couture, placées verticalement dans une dalle horizontale).

En particulier, aucune armature d'effort tranchant n'est requise si les conditions suivantes sont remplies : (*A.5.2,2)

- la dalle est bétonnée sans reprise sur toute son épaisseur (c'est pratiquement toujours le cas)

- la contrainte tangente $\tau_u = \dfrac{V_u}{b_0\ d}$ définie au paragraphe C.2.1. est au plus égal à 0,05 f_{cj} (c'est le cas le plus fréquent).

- si ces conditions ne sont pas remplies, on dimensionne les armatures d'effort tranchant de la même manière que pour les poutres (voir chap. C.3).

CHAPITRE I.5

(*B.7.4)

CONDITION DE NON FRAGILITÉ

Le pourcentage d'armatures tendues doit avoir au moins les valeurs ρ_x et ρ_y (dans les sens x et y ; $x \leqslant y$).

ρ_0 est le pourcentage minimal défini au paragraphe A.8.,

$\rho_0 = \dfrac{A_s}{b_0\, d} \geqslant 0{,}23 \dfrac{f_{tj}}{f_e}$; l_x et l_y sont les dimensions de la dalle ($l_x \leqslant l_y$).

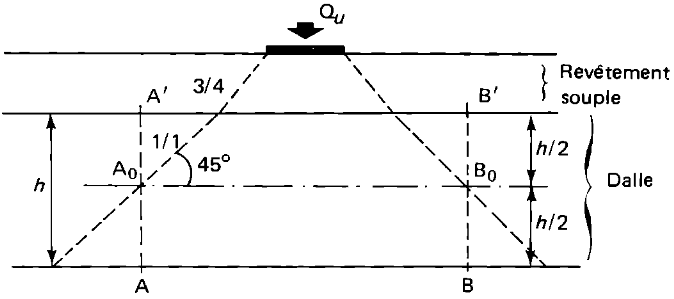
Il faut $\rho_x \geqslant \rho_0 \dfrac{3 - \dfrac{l_x}{l_y}}{2}$ et $\rho_y \geqslant \rho_0$.

CHAPITRE I.6

POINÇONNEMENT

Si une dalle est de faible épaisseur est soumise à une charge importante concentrée sur une petite surface, on risque de voir la charge passer à travers la dalle qui serait traversée comme à l'emporte-pièce par «poinçonnement». Ce phénomène peut se produire même si, par ailleurs, la dalle est correctement armée en flexion.

Le poinçonnement a pour effet d'engendrer une fissuration suivant des plans à 45° à partir des côtés du rectangle d'application de la charge et la rupture par poinçonnement peut être assimilée à une rupture par cisaillement le long de ces plans inclinés.



Par simplification, on admet que ce cisaillement est équivalent à celui qui se produirait suivant les plans verticaux AA', BB', passant par le contour A_0B_0 découpé sur le feuillet moyen de la dalle.

La contrainte de cisaillement à l'état limite ultime est :

$$\tau_u = \frac{Q_u}{U_c h}$$

Q_u = charge appliquée à l'E.L.U.

U_c = contour A_0B_0 sur le feuillet moyen

h = épaisseur de la dalle.

Aucune armature d'effort tranchant n'est requise si l'on a :

$$\tau_u \leqslant 0{,}045\, f_{cj} \qquad (*A.5.2,42)$$

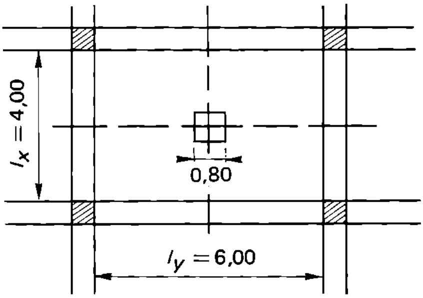
Il est, en général, peu commode et coûteux de disposer des armatures d'efforts tranchants dans une dalle de faible épaisseur ; il convient plutôt de dimensionner l'épaisseur h afin que la condition ci-dessus soit satisfaite :

soit :

$$h \geqslant \frac{Q_u}{0{,}045\, U_c\, f_{cj}}.$$

CHAPITRE I.7

EXEMPLE DE CALCUL D'UNE DALLE



Il s'agit d'un plancher industriel : dalle de 16 cm d'épaisseur + chape ciment 2 cm continue sur un réseau de poutre ; portées entre nus des poutres l_x = 4 m ; l_y = 6 m.

Charges permanentes g = 450 kg /m^2 ~ 4,5 kN/m^2

Charges d'exploitation q = 500 kg/m^2 ~ 5,00 kN/m^2

plus une charge de P = 2 t (~ 20 kN) sur un carré de 0,80 m de côté centré sur la dalle.

I.7.1. Évaluation des moments ultimes

Charges ultimes uniformément réparties :

G = 1,35 (4,5 x 4 x 6) = 145,8 kN

Q = 1,50 (5,0 x 4 x 6) = 180 kN

P apporte un supplément de charge ultime sur le carré de 0,80

$$P_u = 1{,}5\ (20 - 5) = 22{,}5\ \text{kN}.$$

Les 5 kN déduits sont ceux qui sont pris déjà en compte en considérant la charge d'exploitation uniformément répartie, mesurée à l'emplacement de la charge P, la charge q n'existant pas sur un carré de 1 x 1 mètre.

La charge P se répartit sur le feuillet moyen de la dalle sur un carré de

$$0{,}80 + 2\left(0{,}02 + \frac{1{,}16}{2}\right) = 1 \text{ m de côté } (u = v = 1 \text{ m}).$$

Application des abaques de Pigeaud :

$$\rho = \frac{l_x}{l_y} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} = 0{,}67$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{6}{4} = 1{,}5.$$

Moments dus aux charges réparties $G + Q$, l'abaque n° 1 donne :

M_x : (0,047 + 0,20 x 0,018) (145,8 + 180) = 16,45 kN.m

M_y : (0,018 + 0,20 x 0,047) (145,8 + 180) = 8,93 kN.m

Charge concentrée :

$$\frac{u}{a} = \frac{u}{l_x} = \frac{1}{4} = 0{,}25 \qquad \frac{v}{b} = \frac{v}{l_y} = \frac{1}{6} = 0{,}167.$$

$\rho = 0{,}67$; en interpolant entre les abaques n° 5 ($\rho = 0{,}707$) et n° 6 ($\rho = 0{,}60$) on trouve :

$$M_1 = 0{,}18 \quad \text{et} \quad M_2 = 0{,}125$$

d'où

$$M_{P(x)} = (0{,}18 + 0{,}20 \times 0{,}125)\ 22{,}5 = 4{,}61 \text{ kN.m}$$

$$M_{P(y)} = (0{,}125 + 0{,}20 \times 0{,}18)\ 22{,}5 = 3{,}62 \text{ kN.m}$$

Moments ultimes maximaux

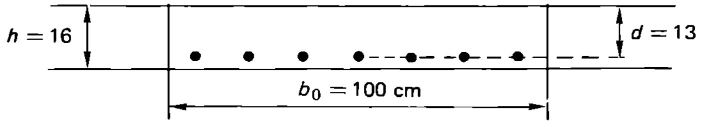
M_0 en travée libre $\begin{cases} M_u(x) = 16{,}45 + 4{,}61 = 21{,}06 \text{ kN.m} \\ M_u(y) = 8{,}93 + 3{,}62 = 12{,}55 \text{ kN.m} \end{cases}$

Compte tenu de la continuité, on adoptera comme valeurs des moments de calcul :

en travée $\begin{cases} \text{sens petite portée : } 21{,}06 \times 0{,}8 = 18{,}85 \text{ kN.m} \\ \text{sens grande portée : } 12{,}55 \times 0{,}8 = 10{,}04 \text{ kN.m} \end{cases}$

sur appuis dans les deux sens = − 21,06 x 0,5 = − 10,53 kN.m

I.7.2. Évaluation des moments résistants (armatures longitudinales).



Nous allons appliquer la «méthode du moment réduit» (voir G.5.3.)

béton : $f_{c28} = 20$ MPa $\quad f_{bu} = \dfrac{0{,}85 \times 20}{1{,}5} = 11{,}3$ MPa

acier : Fe 24 $\quad f_{su} = \dfrac{235}{1{,}15} = 204$ MPa

a) **Sens petite portée :**

$$b_0 = 1 \text{ m} \quad d = 0{,}13 \text{ m}$$

$$\mu = \frac{M_u}{b_0\, d^2\, f_{bu}} = \frac{18{,}85\ 10^{-3}}{100 \times (0{,}13)^2\ 11{,}3} = 0{,}0987$$

d'où :

$$\alpha = 1{,}25\,(1 - \sqrt{1 - 2 \times 0{,}0987}) = 0{,}13$$

$$y = \alpha \times d = 0{,}13 \times 0{,}13 = 0{,}017 = 1{,}7 \text{ cm}.$$

$\alpha < 0{,}259$ *on est au pivot A* ; il en est souvent ainsi dans les dalles en raison de la grande largeur de béton comprimé.

$$\epsilon_b = \epsilon_s \frac{y}{d-y} = \epsilon_s \frac{\alpha}{1-\alpha} \quad \text{car} \quad \frac{y}{d} = \alpha \qquad \epsilon_b = 10\,\frac{0{,}13}{1 - 0{,}13} = 1{,}5\ ‰$$

sur le graphique du paragraphe G.3.5.6. on lit pour $\epsilon_b = 1{,}5$ ‰ $\delta_G = 0{,}37$ d'où $z = d - \delta_G\, y = 13 - 0{,}37 \times 1{,}7 = 12{,}4$ cm.

$$F_s = \frac{18{,}85\ 10^{-3} \text{ MN.m}}{0{,}124} = 0{,}152 \text{ MN} \qquad \frac{f_e}{\gamma_s} = \frac{235}{1{,}15} = 204 \text{ MPa}$$

$$A_s = \frac{0{,}152}{204} = 7{,}45\ 10^{-4} \text{ m}^2 = 7{,}45 \text{ cm}^2$$

$1\ \phi\ 12 = 1{,}13$ cm² nombre minimal par mètre : $\dfrac{7{,}45}{1{,}13} = 6{,}6$

$$\text{espacement maximal} = \frac{100}{6{,}6} = 15{,}15 \text{ cm}$$

on adopte un espacement de 15 cm.

b) **Sens grande portée :**

$$M_u = 10{,}04 \text{ kN.m}$$

les aciers du lit dans ce sens seront placés au-dessus de celui dans le sens petite portée.

On adopte donc ici $d = 13 - 1{,}2 = 11{,}8$ cm

et l'on peut admettre $z \simeq 11$ cm (sans refaire le calcul)

d'où

$$F_s = \frac{10{,}04\ 10^{-3}}{0{,}11} = 0{,}091 \text{ MN}$$

$$A_s = \frac{0{,}091}{204} = 4{,}47\ 10^{-4} \text{ m}^2 = 4{,}47 \text{ cm}^2$$

en adoptant des *ϕ10* (78,5 mm²) l'espacement maximal sera :

$$\frac{100 \times 0{,}785}{4{,}47} = 17{,}6 \text{ cm}$$

on adoptera *15 cm* comme dans l'autre sens, pour avoir un quadrillage carré.

c) **Sur appuis** : (en chapeaux) : $M_u = -10{,}53$ kN.m.

On peut adopter le même $z = 12{,}4$ cm que précédemment.

$$A_s \geqslant \frac{10{,}53\ 10^{-3}}{0{,}124 \times 204} = 4{,}16\ 10^{-4}\ \text{m}^2 = 4{,}16\ \text{cm}^2$$

$\phi\ 10$ (78,5 mm²) espacement maximal : $\dfrac{100 \times 0{,}785}{4{,}16} = 18{,}9$ cm on adoptera un espacement de 18 cm.

I.7.3. Efforts tranchants

L'effort tranchant maximal se produit au milieu du grand côté et sa valeur ultime sur 1,00 m de large est :

$$V_u = \frac{G+Q+P}{2\,l_y + l_x} = \frac{145{,}8 + 180 + 22{,}5}{2 \times 6 + 4} = 21{,}77\ \text{kN}$$

Contrainte de cisaillement :

$$\tau_u = \frac{V_u}{b_0\,d} = \frac{21{,}77\ 10^{-3}}{1 \times 0{,}13} = 0{,}167\ \text{MPa}$$

On doit avoir $\tau_u \leqslant 0{,}05 f_{cj} = 0{,}05 \times 20 = 1$ MPa.

La condition est satisfaite, il n'y a donc pas besoin d'armatures à l'effort tranchant ; c'est pratiquement toujours le cas dans les dalles.

I.7.4. Condition de non fragilité

Il faut $\rho_x \geqslant \rho_0 \dfrac{3 - \dfrac{l_x}{l_y}}{2}$ $\quad \dfrac{l_x}{l_y} = \dfrac{4}{6} = 0{,}67$ et $\rho_0 \geqslant 0{,}23 \dfrac{f_{tj}}{f_e}$.

$$f_{tj} = 0{,}6 + 0{,}06 f_{cj} = 0{,}6 + 0{,}06 \times 20 = 1{,}8\ \text{MPa}$$

$$f_e = 235\ \text{MPa} \qquad \rho_0 \geqslant 0{,}23\ \frac{1{,}8}{235} = 0{,}17\ \%$$

Il faut donc $\rho_x \geqslant 0{,}17\ \% \dfrac{3 - 0{,}67}{2} = 0{,}20\ \%$.

On a : dans le cas du minimum d'armatures, c'est-à-dire pour les chapeaux sur appuis :

$$\rho_x = \frac{A}{b_0\,d} \quad \text{avec} \quad A = \phi\ 10\ \text{esp}^{t}\ 18\ \text{cm} = \frac{100 \times 0{,}785}{18} = 4{,}36\ \text{cm}^2$$

d'où $\rho_x = \dfrac{4{,}36\ 10^{-4}}{1 \times 0{,}13} = 0{,}34\ \% > 0{,}2\ \%$.

La condition de non fragilité est donc satisfaite.

I.7.5. Poinçonnement (chap. 1.6.).

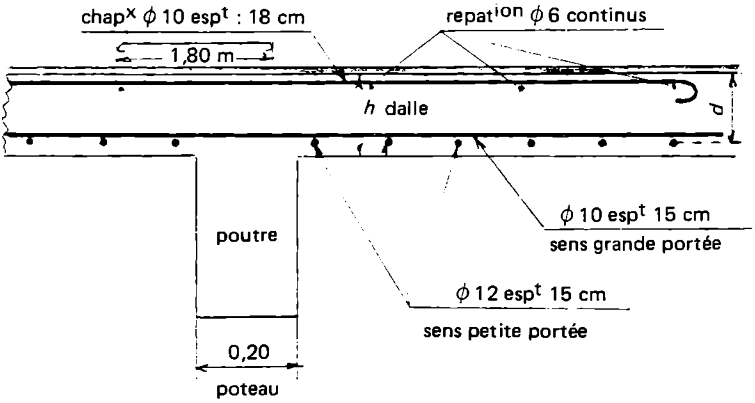
Il se produit le long du contour d'appui de la charge P au niveau du feuillet moyen :

$$\tau_u = \frac{Q_u}{u_c h} \quad u_c = 4 \times 1{,}00\ \mathrm{m} = 4\ \mathrm{m}$$

$$= \frac{1{,}5 \times 20\ 10^{-3}}{4 \times 0{,}16} = 0{,}05\ \mathrm{MPa}$$

Il faut $\tau_u \leqslant 0{,}045 f_{cj} = 0{,}045 \times 20 = 0{,}9$ MPa condition satisfaite.

I.7.6. Disposition des armatures



Coupe transversale perpendiculaire à la petite portée.

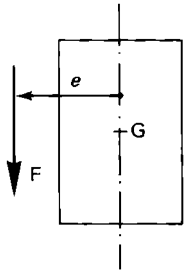
Pour la longueur des chapeaux, on se reportera au paragraphe H.4.1.d en les prolongeant de $\frac{l_x}{5}$ au-delà et de part et d'autre du nu des poutres dont l'épaisseur est 0,20 m, d'où une longueur de : $0{,}20 + 2 \times \frac{4}{5} = 1{,}80$ m.

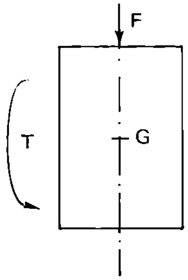
MODULE J - TORSION

CHAPITRE J.1

LE PHÉNOMÈNE DE TORSION

Il se produit dans le plan de la section d'une poutre lorsque une force F se trouve appliquée avec un certain excentrement *e* par rapport au centre de gravité de cette section.





Il en résulte un moment de torsion $T = F \times e$. On peut réduire cette forme de sollicitation à la force F appliquée dans le plan du centre de gravité et à un moment T, dit de torsion.

La force F engendre des contraintes de flexion (contraintes normales σ) et d'effort tranchant (contraintes tangentes τ) qui sont calculées suivant les méthodes précédemment exposées ; de plus, le moment de torsion T doit être pris en compte ; il crée des réactions d'appuis R_A et $R_{A'}$, dissymétriques et complémentaires des réactions d'appuis dûes à la flexion simple ; ceci a pour effet de créer un réseau de contraintes principales à 45°, la contrainte principale de compression σ_{pc} pouvant se schématiser par la formation de bielles de compression permettant à la réaction d'appui R_A de s'équilibrer sur la réaction d'appui R_A, ; le long de ces bielles peuvent naître des fissures dues à la contrainte principale de traction σ_{pt} ; ce risque de fissuration nécessite la mise en place d'un réseau *supplémentaire* d'armatures transversales (cadres) et longitudinales (barres droites) réparties à la périphérie ; en effet,

c'est essentiellement la zone périphérique de la section qui se trouve sollicitée par ces contraintes tangentes de torsion ; c'est pourquoi ce sont les sections tubulaires fermées qui résistent le mieux à la torsion.

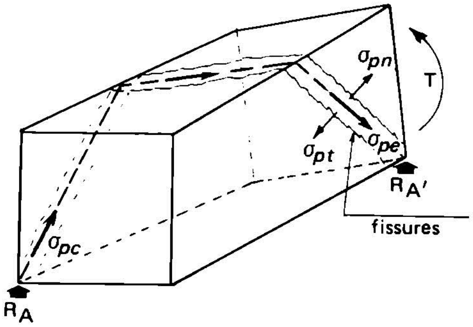


Schéma de fonctionnement d'une poutre-caisson soumise à un moment de torsion T.

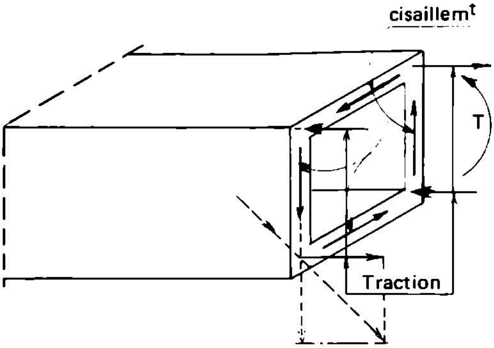
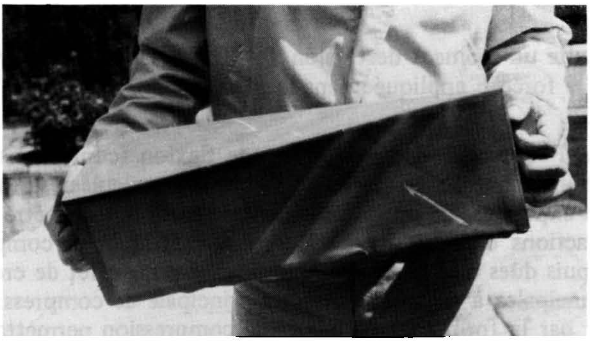


Schéma des contraintes internes engendrées par la torsion.



Ce tube carré est constitué de quatre baguettes sur lesquelles est tendue une feuille caoutchoutée. Les ondulations qui se forment sous l'effet de la torsion montrent bien la direction des contraintes principales de compression (flèche perpendiculaire aux plis), les contraintes principales de tranction étant dans le sens des plis.

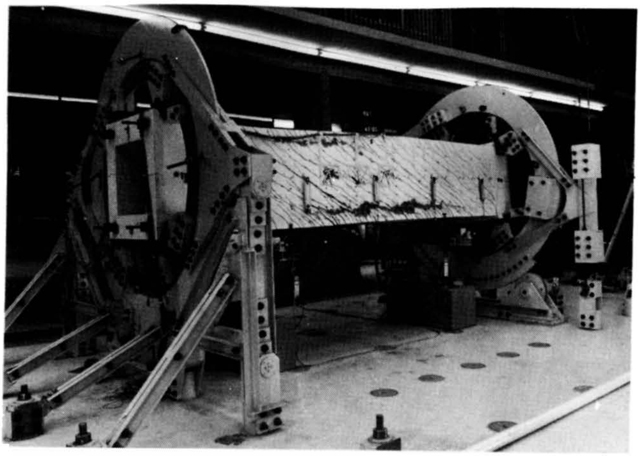


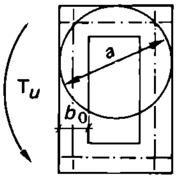
Figure de rupture d'une poutre tubulaire carrée de 1,00 m de côté et 5 m de long ; la fissuration à 45° s'est généralisée. La rupture s'est produite par écrasement du béton en compression à la base des bielles et par l'ouverture importante de certaines de ces fissures à 45°.

CHAPITRE J.2

CALCUL DES CONTRAINTES

Le BAEL indique dans son chapitre *A.5.4. les règles à suivre ; elles s'appliquent aux pièces linéaires de section convexe pleine (poutres) ou creuse (caissons).

J.2.1. Sections creuses



soit : T_u : le moment de torsion ultime.

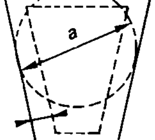
b_0 : l'épaisseur de la paroi ; Ω : l'aire du contour tracé à mi-épaisseur des parois ; on appelle u son périmètre.

La contrainte tangente de torsion :

$$\tau_T = \frac{T_u}{2\,\Omega\,b_0}.$$

Si b_0 est supérieure à $a/6$ (a = diamètre du cercle inscrit dans le contour extérieur) on remplace b_0 par la valeur $a/6$.

J.2.2. Sections pleines



soit : a le diamètre du cercle inscrit dans le contour extérieur. On remplace la section pleine par une section creuse dont l'épaisseur de paroi b_0 est égale à $a/6$. Cette méthode n'est pas susceptible d'être étendue aux sections de forme complexe.

On peut cependant l'appliquer aux sections décomposables en rectangle ; on considère alors séparemment chacun des rectangles juxtaposés composants la section puis on supprime dans les rectangles composants, les éléments de paroi qui ne suivent pas le contour extérieur de la section.

CHAPITRE J.3

JUSTIFICATION DU BÉTON

La contrainte ultime τ_T est cumulée avec la contrainte ultime τ_V due à l'effort tranchant de flexion simple (lorsqu'il existe) et la contrainte résultante τ doit satisfaire aux conditions du paragraphe C.2.2. :

cas courants $\tau \leqslant 0{,}13\, f_{cj}$ ou 4 MPa

cas ou la fissuration est préjudiciable ou très préjudiciable : $\tau \leqslant 0{,}10\, f_{cj}$ ou 3 MPa.

CHAPITRE J.4

(*A.5.4,5)

JUSTIFICATION DES ARMATURES

Il convient de prévoir deux systèmes d'armatures respectivement parallèles : armatures longitudinales de section totale A_l, d'une part, et orthogonales d'autre part : cadres de section A_t pour le ou les brins d'une des âme ou d'une face, espacés de s_t.

Les sections A_l et A_t seront déterminées par application des formules :

$$\frac{A_t}{s_t} \times \frac{f_e}{\gamma_s} = \frac{A_l}{u} \times \frac{f_e}{\gamma_s} = \frac{T_u}{2\,\Omega}$$

u est le périmètre du contour d'aire Ω.

Dans les sections rectangulaires, les armatures longitudinales de section totale A_l sont disposées dans les angles et en partie sur les faces pour les sections de grande dimension ; elles s'ajoutent évidemment aux armatures longitudinales de flexion simple.

Nota : l'efficacité de ce réseau d'armatures sera d'autant meilleure qu'elles seront placées plus près de la périphérie, sous réserve, bien entendu, de réserver les épaisseurs d'enrobage nécessaire (voir § A.6.1.).

MODULE K - FONDATIONS

Les éléments de fondation ont pour objet de transmettre au sol les efforts apportés par les éléments de la structure (poteaux, murs, ...).

La transmission peut être directe (semelles filantes ou isolées, radiers...) ou être assurée par des éléments spéciaux (pieux battus ou moulés dans le sol, ...), lorsque le bon sol est en profondeur.

Nous n'abordons ici que ce qui concerne les éléments en béton armé ; il va de soi que, par ailleurs, la résistance du sol doit être vérifiée par certaines règles de calcul basées sur la mécanique des sols et la reconnaissance par sondages ; certains paramètres font l'objet de mesures géotechniques in situ : compacité, densité, angle de frottement interne, cohésion, résistance, consolidation, tassement, etc... ; elles permettent de déterminer la résistance du sol avec la sécurité suffisante.

CHAPITRE K.1

RÉSISTANCE DU SOL

A titre simplement indicatif, nous donnons ci-après quelques contraintes *admissibles* de compression sur le sol de fondation σ_f sous réserve d'un certain encastrement dans les couches correspondantes :

Nature du sol	σ_f (en MPa)
Silts et limons de plateaux	0,1 à 0,2
Terre caillouteuse	0,2 à 0,3
Sable de Fontainebleau	0,3 à 0,6
Sables et graviers alluvionnaires	0,4 à 0,6
Craie	0,6 à 0,7
Marne et caillasse	0,6 à 1
Sables et galets compacts	1 à 2
Calcaire grossier	2 à 3
Roches compactes	>5

Certaines de ces valeurs peuvent être augmentées lorsque la semelle de fondation se trouve à une certaine profondeur au-dessous du niveau du sol. Elles correspondent à des valeurs *admissibles* sous charges de service non majorée.

Nota : En général, une étude de sol par un *laboratoire spécialisé* sera nécessaire pour fixer les contraintes admissibles à prendre en compte pour les calculs de stabilité de l'ouvrage.

CHAPITRE K.2

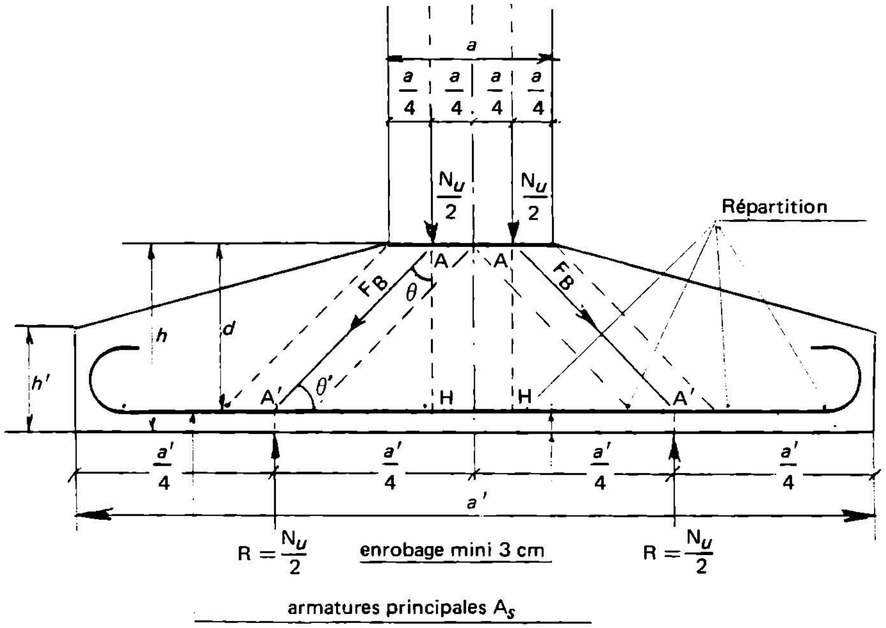
FONDATIONS SUPERFICIELLES

D'une façon générale, les éléments de fondation sont relativement massifs et peu élancés et ne se prêtent guère à l'application des méthodes de calculs classiques telles que nous les avons développées pour les poutres par exemple. La méthode la plus simple et généralement utilisée est la «*méthode des bielles*» (*B.9.3)

K.2.1. Semelles continues (filantes)

On les trouve, par exemple, sous les murs porteurs.

a) Principe de la méthode des bielles et dimensionnement :



L'effort normal ultime N_u (en kN/m.c[t]) à la base du mur porteur de largeur a peut se décomposer en deux forces $\frac{N_u}{2}$ à $\frac{a}{4}$ de l'axe ; ces deux forces se transmettent au sol par deux bielles AA′ d'inclinaison θ et y trouvent les réactions d'équilibre $R = \frac{N_u}{2}$ à la distance $a'/4$ de l'axe, a' étant la largeur de la semelle ; ceci suppose que sa *rigidité est suffisante* pour que la contrainte sur le sol puisse être considérée comme *uniformément répartie*. La force de compression dans les bielles est :

$$F_B = \frac{N_u}{2 \cos \theta} .$$

Les armatures inférieures jouent le rôle de tirant entre les pieds A′ des bielles ; la force de traction dans ce tirant est :

$$F_T = F_B \cos \theta' = \frac{N_u}{2} \frac{\cos \theta'}{\cos \theta}$$

La meilleure solution qui donne $F_T = \frac{N_u}{2}$ est $\theta = \theta' = 45°$; elle implique que l'on prenne : $d = A'H = \frac{a' - a}{4}$, a' est déterminé en fonction de la charge de service N et de la contrainte admissible sur le sol de fondation $\overline{\sigma_f}$ (contrainte uniformément répartie).

$$a' \text{ (en m)} \geqslant \frac{N \text{ (en MN par m.c}^t)}{\overline{\sigma_f} \text{ (en MPa)}}$$

on choisit alors $$d \geqslant \frac{a' - a}{4}.$$

La semelle peut être d'épaisseur constante ou de moindre épaisseur à ses extrémités ($h' < h$) ; dans ce cas la hauteur h' doit être suffisante pour y loger sans difficultés les crochets d'ancrage des armatures, s'ils sont nécessaires, car on vérifiera l'adhérence et la longueur d'ancrage à partir du point A′ sous l'effort

$$F_T = \frac{N_u}{2}.$$

Ces règles de dimensionnement (confirmées par l'expérience) dispensent de vérifier les contraintes dans le béton (compression dans les bielles, poinçonnement, cisaillement) et il n'est pas nécessaire d'armer la semelle à l'effort tranchant par des armatures verticales de couture.

Pour le dimensionnement des armatures, on adoptera une section A_s par mètre courant de semelle telle que :

$$A_s \geqslant \frac{N_u}{2 f_{su}} \quad \text{avec} \quad f_{su} = \frac{f_e}{1{,}15} .$$

b) Exemple

Un mur de soubassement de 40 cm d'épaisseur transmet à une semelle de fondation continue une charge verticale ultime N_u = 320 kN (~ 32 t) par m.c[t], la charge de service étant N = 220 kN.

Le sol admet une contrainte admissible de 0,14 MPa. (sous charge de service).

Pour dimensionner la semmelle, il faut :

$$a' \geqslant \frac{220\ 10^{-3}}{0{,}14} = 1{,}57 \text{ m}$$

adoptons . . . . $a' = 1{,}60$ m.

Il faudra $d \geqslant \frac{a'-a}{4} = \frac{160-40}{4} = 30$ cm compte tenu d'un enrobage minimale de 3 cm, on adoptera $h = 35$ cm.

Si l'on choisit des aciers naturels Fe E 24, $f_{su} = \frac{235}{1{,}15} = 204$ MPa.

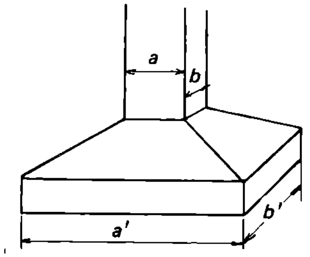
On aura $\qquad A = \frac{320\ 10^{-3}}{2 \times 204}\ \text{m}^2 = 784\ \text{mm}^2.$

Par exemple $\qquad A = 4\ \phi\ 16$ p.m $= 804\ \text{mm}^2.$

Il conviendra de prévoir l'ancrage nécessaire au-delà du point A'. Quelques armatures de répartition et de montages seront prévues (par exemple 8 ϕ 8).

c) **Remarque** : Les contraintes sur le sol sont calculées à partir des charges de *service* (sans majoration d'état ultime) pour être comparées à des *contraintes admissibles* ; par contre les armatures sont déterminées à l'état limite ultime ; il conviendra donc de conduire la descente de charges en séparant les charges permanentes G des charges d'exploitation Q pour qu'au niveau des fondations on puisse facilement calculer l'action totale N en service normal (G + Q) et à l'E.L.U. (1,35 G + 1,50 Q).

K.2.2. Semelles sous poteaux



La semelle pourra être dimensionnée en suivant les mêmes règles dont le bienfondé se démontre de la même façon :

$$d \geqslant \frac{a'-a}{4} \text{ et } \geqslant \frac{b'-b}{4}$$

Les efforts de traction à équilibrer par les armatures dans chaque sens seront :

sens a' : $F_{a'} = N_u \frac{a'-a}{8d}$ $\quad$ et l'on a : $\quad A_a = \frac{F_{a'}}{f_{su}}$

sens b' : $F_{b'} = N_u \frac{b'-b}{8d}$ $\quad A_b = \frac{F_{b'}}{f_{su}}$.

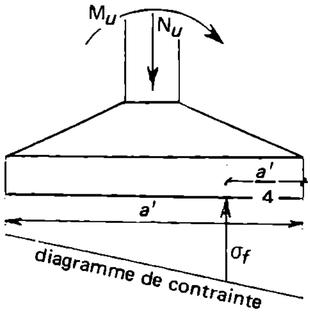
Si les dimensions du poteau, a et b, sont égales (poteau carré) ou peu différentes, on adopte, en général, une semelle carrée ($a' = b'$) et dans ce cas la section d'armatures à prévoir dans chaque sens est, en supposant que l'on a adopté

$$d = \frac{a'-a}{4}.$$

$$A_s = \frac{N_u}{2 f_{su}} \quad \text{avec} \quad f_{su} = \frac{f_e}{1{,}15}.$$

Si le poteau n'est pas carré ($a < b$), on placera en 1er lit inférieur les armatures parallèles au petit côté du poteau (sens a et a').

K.2.3. Poteaux soumis à un moment



Dans le cas où les poteaux sont sollicités au niveau supérieur des semelles par des moments fléchissants susceptibles de déterminer des efforts de traction sur une ou plusieurs faces, on est conduit à retourner horizontalement les barres longitudinales des poteaux en les croisant à la partie inférieure des semelles.

Pour le calcul de la semelle, la réaction du sol ne sera plus uniformément répartie sous la semelle ; le calcul sera alors conduit de la façon suivante : le moment M conduit à une excentricité e sur le sol de fondation : $e = \frac{M}{N}$ (M et N valeurs de service sans majoration à l'E.L.U.).

a) Si $e \leqslant \frac{a'}{6}$ la répartion de la contrainte sur le sol de fondation est trapézoïdale (ou triangulaire à la limite si $e = \frac{a'}{6}$).

La règle imposée par le D.T.U. «Fondations» est de vérifier que la contrainte σ_f sur le sol de fondation au 1/4 de la semelle (côté de la contrainte maximale) reste inférieure ou égale à la contrainte admissible sur le sol : $\overline{\sigma_f}$.

On a :

$$\sigma_{fu} = \frac{N}{a'b'} + \frac{M\nu}{I}$$

$$M = N \times e \; ; I = \frac{b'a'^3}{12} \quad ; \quad \nu = \frac{a'}{4} \quad ; \text{d'où}$$

$$\sigma_f = \frac{N}{a'b'}\left(1 + \frac{3e}{a'}\right) \leqslant \overline{\sigma_f}$$

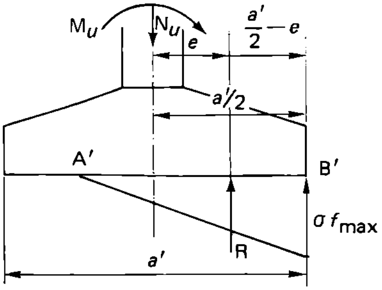
b) Si $e > \frac{a'}{6}$ la répartition est triangulaire sur : $A'B' = 3\left(\frac{a'}{2} - e\right)$

et la contrainte maximale est :

$$\sigma_{f\max} = \frac{2\,\mathrm{N}}{3\left(\frac{a'}{2} - e\right) b'}$$

Dans ce cas, on vérifiera que

$\sigma_{f\max} \leqslant 1{,}33\ \overline{\sigma_f}$.

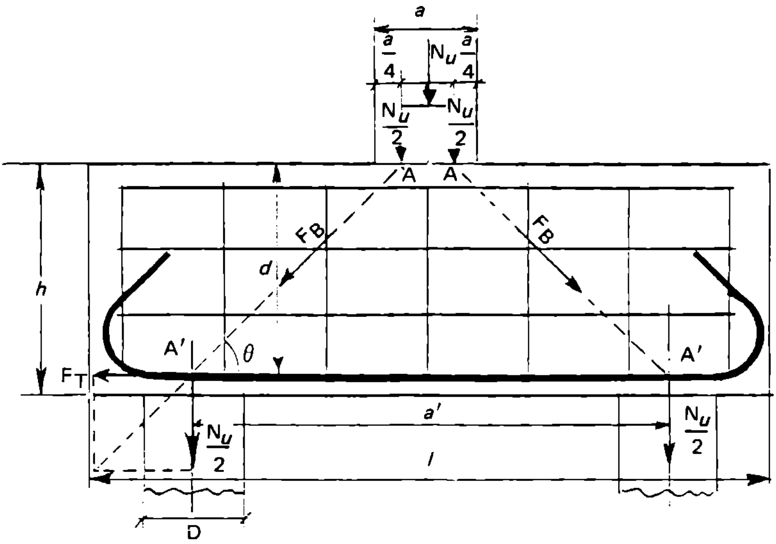


CHAPITRE K.3

FONDATIONS PROFONDES

K.3.1. Semelles sur deux pieux :

Pour les semelles sur pieux, on utilise également la méthode des bielles qui a été sanctionnée par l'expérience (*Théorie et essais* de MM. Blévot et Frémy, annales I.T.B.T.P. Fév. 1967).



On a : F_B (compression dans la bielle AA') : $\dfrac{N_u}{2\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)}$ et F_T (effort de traction dans les armatures constituant tirant) $= F_B \cos\theta = F_T = \dfrac{N_u \cos\theta}{2\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)}$.

Si D est le diamètre (ou le côté des pieux) il faut :

$$a' \geqslant 2{,}5\ \mathrm{D} \quad \text{et} \quad \theta \geqslant 45°.$$

Si on adopte $\theta = 45°$ (valeur optimale) on aura $d = \frac{a'}{2} - \frac{a}{4}$ et l'effort de tranction dans les armatures est $\mathrm{F_T} = \frac{\mathrm{N}_u}{2}$ d'où la section d'armatures :

$$\mathrm{A} = \frac{\mathrm{N}_u}{2 f_{su}} \quad \text{avec} \quad f_{su} = \frac{f_e}{1{,}15}.$$

On disposera quelques armatures complémentaires, barres longitudinales avec épingles et cadres transversaux ; pour les barres longitudinales supérieures, on pourra adopter $\mathrm{A}' = \frac{\mathrm{A}}{10}$ et pour les armatures transversales, un pourcentage géométrique de 2/1000 environ.

Si on a un moment M_u en pied de poteau, la réaction R est augmentée sur le pieu sur lequel agit le moment (selon son sens) et l'on a :

$$\mathrm{R} = \frac{\mathrm{N}_u}{2} + \frac{\mathrm{M}_u}{a'}.$$

On calculera la traction $\mathrm{F_T}$ dans les armatures à partir de cette valeur R (au lieu de $\frac{\mathrm{N}_u}{2}$.

Au-delà des points A', il faudra prolonger les armatures de la longueur d'ancrage nécessaire (avec crochets en général) et dimensionner la longueur totale l de la semelle en conséquence.

K.3.2. Semelles sur plus de deux pieux

Le principe de fonctionnement et de résistance est toujours le même, mais l'effort vertical apporté par le béton se décompose en autant de bielles qu'il y a de pieux et les armatures jouent le rôle de tirants entre les pieds de bielles ; on se limite, en général, à des semelles sur trois et quatre pieux. On trouvera toutes les règles de calcul à appliquer (et leur justification) dans le n° des Annales l'I.T.B.T.P. de février 1967 (article de MM. Blévot et Frémy).

K.3.3. Pieux en béton armé

a) **Les pieux battus** doivent être calculés en général *en compression* sous l'effet de la charge à supporter et *en flexion* au levage (élinguage en un ou deux points) et cette dernière condition est souvent la plus déterminante ; il est signalé que pour les pieux carrés, il est plus défavorable de supposer qu'au levage la section se présente avec une diagonale verticale plutôt que deux des côtés, mais le calcul est plus complexe.

Pour les pieux carrés, le côté de la section peut être approximativement fixé à 0,10 + 0,015 l (en mètres) l étant la longueur du pieu.

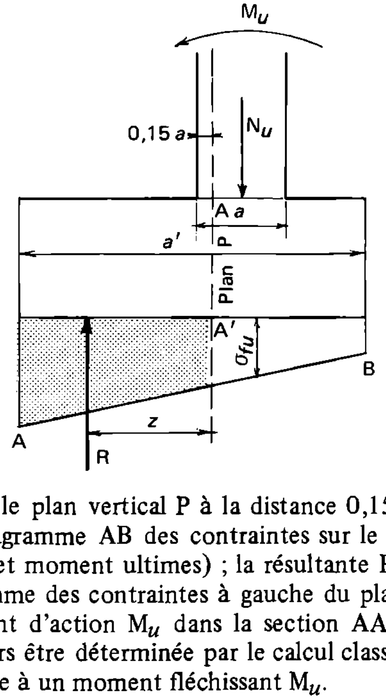
On doit prévoir, dans les têtes, un ferraillage renforcé et un important frettage ainsi qu'un *béton particulièrement compact et résistant*, ceci pour éviter leur éclatement sous les coups de mouton.

b) **Les pieux moulés dans le sol** sont de section circulaire et d'un diamètre assez grand (souvent $\geqslant$ 1 m) ; ils sont, en général, peu armés et sont calculés, dans la plupart des cas, en compression simple en n'admettant comme contrainte sur le béton qu'une valeur relativement faible (5 MPa par exemple).

CHAPITRE K.4

MÉTHODE DU C.E.B.

Elle a l'avantage d'être facilement généralisable. Le principe en est le suivant :



On considère le plan vertical P à la distance 0,15 *a* du parement du poteau ; on détermine le diagramme AB des contraintes sur le sol σ_{fu} sous l'effet de N_u et M_u (effort normal et moment ultimes) ; la résultante R de réaction sous la semelle correspond à la somme des contraintes à gauche du plan P (surface grisée) ; on calcule alors le moment d'action M_u dans la section AA' : $M_u = R \times Z$; la section d'armature peut alors être déterminée par le calcul classique à l'E.L.U. d'une section rectangualire soumise à un moment fléchissant M_u.

Dans le cas de semelles sur pieux multiples, on détermine les réactions R_1, R_2,... sur chacun des pieux à la distance z_1, z_2 ... du plan P et la méthode s'applique de la même manière

$$M_u = (R_1 z_1 + R_2 z_2 \ldots).$$

BIBLIOGRAPHIE

La bibliographie sur le Béton Armé est particulièrement étendue ; nous ne citons ci-dessous que quelques références particulièrement intéressantes :

1 *Le formulaire du béton armé* par CHAMBAUD, COURTAUD et LEBELLE ; 2 tomes (Éditions Eyrolles).

2 *Traité de béton armé* par A. GUÉRIN ; 7 tomes (Éditions Dunod).

3 *Aide mémoire de béton armé* par V. DAVIDOVICI (Éditions Dunod).

4 *Technologie professionnelle de chantier : béton armé* par A. MEUNIER (Éditions Foucher).

5 *Béton armé - calcul des ossatures* par A. FUENTÈS (Éditions Eyrolles).

6 *Le nouveau guide du béton* par G. DREUX (Éditions Eyrolles).

7 *Essais et contrôle des bétons* par F. GORISSE (Éditions Eyrolles).

8 *La fabrication du béton* par P. CORMON (Éditions Eyrolles).

9 *Technologie du bâtiment - gros œuvre - ouvrages en béton armé* par H. RENAUD et F. LETERTRE (Éditions Foucher).

10 *Ossatures des bâtiments* par A. COIN (Éditions Eyrolles).

11 *Memento Eyrolles béton armé* (2 dépliants n° 1 et n° 2) par J. PERCHAT.

12 *Calcul dé béton armé à l'état limite ultime* par A. JALIL, A. MORISSET et J. PERCHAT (Éditions Eyrolles).

13 *Guide pratique d'utilisation des règles B.A.E.L. 80* par A. CAPRA et V. DAVIDOVICI (Éditions Eyrolles).

14 *Le flambement des poteaux en béton armé* par P. FAESSEL, A. MORISSET et B. FOURÉ (Annales I.T.B.T.P. n° 305 mai 1973).

15 *Calcul pratique du béton armé à l'état limite ultime* - Méthodes simplifiées et approchées de dimensionnement en flexion simple et composée, par W.A. JALIL et J. PERCHAT (Annales de l'I.T.B.T.)., n° 346 janvier 1977).

16 *Béton armé aux états limites* par H. THONIER, V. HACHEMI, SAFAI et M. RAHIMIAN (Annales de l'I.T.B.T.P. n° 372 mai 1979).

17 *Calcul en flexion simple ou composée à l'état limite ultime des sections rectangulaires en béton armé* - Abaques d'optimisation par A. CAPRA et M. HAUTCOEUR. Annales I.T.B.T.P. n° 375 septembre 1979.

18 *Initiation au calcul des structures* - Béton et Acier - J. FAUCHARD (Éditions Eyrolles).

19 *Les coffrages pour le béton armé* - F. PIERRE - (Éditions Eyrolles).

20 *Le calcul et la vérification des ouvrages en béton armé* par P. CHARON (Éditions Eyrolles).

21 *Exercices de béton armé avec leurs solutions* par P. CHARON (Éditions Eyrolles).

22 *Calcul des ouvrages en béton armé suivant les règles B.A.E.L. 80* par P. CHARON (Éditions Eyrolles).

Imprimé en France. — JOUVE, 18, rue Saint-Denis, 75001 Paris.
N° 18265 - Dépôt légal : Décembre 1987 - N° d'Editeur : 4627

Ce livre a été rédigé dans un style facile et clair ne faisant appel qu'à des notions de mathématiques très élémentaires et à une simple initiation à la résistance des matériaux.

Il s'adresse tout particulièrement aux techniciens et dessinateurs projeteurs qui désirent s'initier au calcul du béton armé, comme aux techniciens supérieurs et aux ingénieurs désirant adapter leurs connaissances aux nouvelles méthodes de calcul aux états-limites.

L'auteur professeur à l'IUT de Génie Civil de la région parisienne a conçu ce livre pour qu'il constitue en fait, un véritable «cours pratique» de béton armé.

EYROLLES

9 782212 012040